

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Faculté des Sciences Appliquées

Département de génie mécanique

FORMULATION NUMÉRIQUE DE LA SENSIBILITÉ DE LA RÉPONSE VIBRATOIRE
AUX INCERTITUDES PHYSIQUES D'UN MODÈLE STRUCTURAL

Mémoire de maîtrise ès sciences appliquées

(Master of Applied Science)

Spécialité: génie mécanique

JEAN-SÉBASTIEN

GENOT

Sherbrooke (Québec), CANADA

Juin 1998

A ma famille, à Nathalie

Avertissement au lecteur

L'auteur utilise le symbole $\langle v^2 \rangle$ tout au long du mémoire pour désigner l'énergie cinétique spécifique. L'énergie cinétique spécifique est le rapport de l'énergie cinétique de la structure sur sa masse totale. Le lecteur prendra garde de ne pas confondre ce symbole avec celui de la vitesse quadratique $\langle v_n^2 \rangle$.

D'autre part, l'auteur emploie "croisement de modes" dans la section (5.4.3) pour exprimer que deux modes changent d'ordre sous l'effet des variations de propriétés physiques de la structure. Dans la littérature spécialisée, l'expression "croisement de modes" exprime plutôt que deux modes changent d'ordre sous l'effet d'un couplage avec un fluide lourd par exemple.

Résumé

Les validations numériques sont très importantes pour assurer la sécurité et la qualité des produits fabriqués en série. La validation est faite à partir de dimensions et de propriétés exactes (exemptes de tolérances), situation qui n'existe pas dans la réalité. Pour combler en partie l'impuissance des simulations à tenir compte des variations possibles, le modèle numérique est recalé sur un modèle réel, choisi dans une ligne de produits. La technique de recalage a deux défauts qui limitent son crédit aux yeux de l'ingénieur: d'une part elle est peu rigoureuse et coûteuse, d'autre part elle est adéquate seulement pour un modèle réel précis. Pour répondre à ce problème, il faut tenir compte des incertitudes physiques et des tolérances *au niveau numérique*, pour pouvoir prédire en une seule fois la plage de variations du comportement mécanique d'une structure complexe, et accélérer ainsi les validations.

L'objet de ce travail est d'élaborer une technique efficace permettant d'incorporer directement dans les outils de calcul (logiciels d'éléments finis) les moyens de prédire le comportement vibratoire maximal ou minimal de structures dont *les propriétés physiques* sont imprécises, que ce soit par inaccessibilité de la grandeur à mesurer (dimensions d'un carter), par absence de données scientifiques (amortissement), ou parce que le processus de fabrication est trop complexe (tolérances multiples, traitements thermiques, collage d'interface, etc...). Il existe déjà des méthodes qui ont des inconvénients majeurs: soit leur relative lenteur (méthode de Monté Carlo), soit leur inaptitude à prédire la bonne réponse maximale pour des incertitudes importantes des paramètres physiques. L'objet de la maîtrise est d'élaborer une méthode numérique qui soit rapide et robuste avec de grandes incertitudes ($\geq 10\%$ de la valeur nominale).

La nouvelle méthode est baptisée PMO pour "Points Modaux Optimaux". Elle peut être utilisée pour prédire le maximum ou le minimum de toute réponse vibratoire pouvant s'exprimer

comme la somme des contributions de chacun des modes propres de la structure (décomposition modale). Dans l'optique de simplifier les développements théoriques, la réponse choisie est l'énergie cinétique spécifique (dimension: m^2/s^2). L'énergie cinétique spécifique est notée $\langle v^2 \rangle$ dans le reste du mémoire. D'autre part, on a mis l'accent sur le calcul du maximum, le calcul du minimum étant possible avec quelques modifications. La décomposition modale met en évidence que la coïncidence fréquentielle joue un rôle prépondérant dans la recherche du maximum de la réponse. L'exploitation de cette remarque conduit au maximum de la réponse via un problème d'optimisation, expliqué en détail dans les chapîtres suivants. Les résultats de la méthode PMO sont comparés à ceux d'autres méthodes (Monté Carlo, et perturbations). La nouvelle méthode est presque aussi rapide qu'une méthode de perturbations, tout en offrant la possibilité de traiter des incertitudes larges (supérieures à 20% de variation totale, soit 10% de variation de part et d'autre de la moyenne).

Summary

It is important to validate the dynamic behavior of structures by means of numerical tools. In general, the numerical properties do not match the real properties, thus requiring model updating. However, model updating is very expensive, unrigorous, and it only fits one specimen of the product. The approximate feature of the physical properties is to be addressed *at the numerical level*.

This work presents a new method to predict the maximum response of vibrating structures, given physical uncertainties in the model properties (Young's modulus, dimensions, etc...). The existing methods have major drawbacks: they are either slow (Monte Carlo method), or inaccurate for uncertainties greater than 10% in the nominal values of the physical properties, especially in dynamics (Perturbation methods). The new method, named OMP (for Optimal Modal Points, or PMO in french) addresses both: it runs faster than the Monte Carlo method, and it is accurate for large uncertainties (more than 10%).

The new method is suitable for any response which can be expressed as a sum of modal contributions. In this work, the chosen response is the specific kinetic energy of the structure (m^2/s^2). It is written $\langle v^2 \rangle$. The new method calculates the maximum (or minimum) response of finite element models with uncertain physical properties. The method is based on the modal decomposition of the specific kinetic energy and linearization of the eigenproperties of the model. The problem is treated with a linear or quadratic programming scheme. As a result, the method competes with the perturbation methods in term of CPU time.

Remerciements

J'exprime mon immense gratitude aux professeurs, techniciens, secrétaires et étudiants qui m'ont aidé. Tout particulièrement, je remercie François Charron et Noureddine Atalla, co-directeurs de maîtrise et guides vigilants. Enfin, je dois plus encore à mes parents pour m'avoir donné la chance de faire des études à l'étranger, et à Nathalie pour ces jours passés ensemble.

Nomenclature

Notations fréquentes:

C_n	produit des intervalles d'incertitude $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$
$[C]$	matrice d'amortissement
E	module d'Young
\mathcal{E}_k	combinaison des paramètres optimaux du mode k
$\{F\}$	force d'excitation
h	épaisseur
I	moment quadratique d'une section
I_i	intervalle d'incertitude de la variable x_i
$[I]$	matrice identité
j	racine de -1
$[K]$	matrice de raideur
L	longueur
m	masse totale de la structure
M	nombre de modes propres
$[M]$	matrice de masse
nt	nombre de tirages aléatoires par variable (Monté Carlo)
nf	nombre de fréquences d'excitations
n	nombre de variables
ni	nombre d'itérations de la méthode SLP (Sequential Linear Programming)

Suite...

N	nombre de degrés de liberté (matrices de raideur et masse)
\mathcal{N}	symbole de la loi normale centrée réduite
$\{q\}$	vecteur déplacement modal
S	surface d'une section droite
$\{u\}$	vecteur déplacement réel
$\langle v^2(\omega) \rangle$	énergie cinétique spécifique
$[Z]$	impédance mécanique force-déplacement

Caractères grecs:

Γ_k	participation dynamique (mode k)
Δx	petite variation de x autour de $x^{(0)}$
Δ_{x_i}	incertitude relative de la variable x_i
η	coefficient d'amortissement structural
λ_k	valeur propre d'ordre k
ϵ	petite quantité positive
$\{\Phi_k\}$	vecteur propre d'ordre k
ρ	masse volumique
σ_x	écart type de la variable x
ω_k	fréquence propre cyclique du mode k
ω	fréquence cyclique d'excitation

Notations particulières:

$\{q\}^*$	conjugué complexe du vecteur déplacement modal
$\{\dot{u}\}$	vitesse réelle
$\{\ddot{u}\}$	accélération réelle
$\{\hat{\Phi}_k\}$	approximation du vecteur propre $\{\Phi_k\}$

Suite...

$\hat{\omega}_k$	approximation de la fréquence propre exacte ω_k
$x_i^{(0)}$	variable x_i à sa valeur d'origine
\bar{x}	estimateur de la moyenne de x
$E[x]$	moyenne exacte de x
$Var[x]$	estimateur de la variance de x
$V[x]$	variance exacte de x
$Cov[x_i, x_j]$	covariance des variables x_i et x_j
$[\tilde{Z}]$	impédance mécanique projetée sur la base des vecteurs propres
$\ \cdot\ _2$	norme 2 d'un vecteur
\mathcal{E}_k	paramètres minimisant la coincidence d'ordre k

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Le contexte de l'étude	1
1.2	L'incertitude dans les calculs vibratoires	2
1.3	Le plan du mémoire	3
2	Etat des connaissances	4
2.1	Introduction	4
2.2	Position du problème	5
2.3	Historique et généralités	7
2.3.1	Historique des méthodes de prédiction	7
2.3.2	Généralités sur la méthode des éléments finis: application à la prédiction des réponses	9
2.4	Les éléments finis stochastiques	11
2.4.1	Première étape: variables et champs incertains ou aléatoires	11
2.4.2	Discrétisation	13
2.4.3	Le calcul par éléments finis	14
2.5	Les méthodes de perturbations	16
2.5.1	L'approche développement en série de Taylor	16
2.5.2	Complément sur le calcul du gradient $\frac{\partial \{u\}}{\partial x}$: variable adjointe	21
2.5.3	L'approche de Neumann	22
2.6	Méthodes d'optimisation	25
2.6.1	Les approximations globales et mixtes	26

2.6.2	Les approximations locales	30
2.6.3	Localisation des maxima et minima	31
2.6.4	Nouvelles méthodes et technique de ré-analyse	31
2.7	Conclusion	33
3	Objectifs de la recherche	34
3.1	Objectif général	35
3.2	Objectifs spécifiques	35
4	Bases théoriques des méthodes de prédiction	36
4.1	Introduction	36
4.2	Méthode de Monté Carlo	38
4.2.1	Organigramme	38
4.2.2	Théorie	38
4.2.3	Implémentation	40
4.2.4	Compléments	42
4.3	Méthode de perturbation	43
4.3.1	Organigramme	43
4.3.2	Rappels d'analyse modale et expression de l'énergie cinétique spécifique . . .	43
4.3.3	Equation perturbée de l'énergie cinétique spécifique	46
4.3.4	Moyenne de l'énergie sur C_n	48
4.3.5	Variance de l'énergie sur C_n	49
4.3.6	Synthèse des expressions de la moyenne et de la variance	50
4.3.7	Vue globale de l'implantation	51
4.3.8	Calcul des dérivées modales avec l'algorithme de Nelson	53
4.3.9	Compléments sur la méthode de perturbations	56
4.4	Méthode modale de recherche de paramètres optimaux	59
4.4.1	Organigramme	59
4.4.2	Présentation du problème	59
4.4.3	Localisation des maxima	59
4.4.4	Formulation du problème pour plusieurs variables et plusieurs modes	61

4.4.5	Propriété des modes et application	65
4.4.6	Synthèse et conclusion	67
5	Méthodologie et résultats	70
5.1	Introduction	70
5.2	Méthodologie	70
5.2.1	Rappel des conditions	70
5.2.2	Modèles éléments finis utilisés pour la validation	72
5.2.3	Elaboration du fichier d'entrée	75
5.2.4	Stratégies d'assemblages	76
5.2.5	Plan d'étude des résultats	78
5.3	Approximation des vecteurs et fréquences propres	78
5.3.1	Conditions d'approximation	78
5.3.2	Approximations linéaire et quadratique	78
5.3.3	Approximation des fréquences propres: résultats et discussions	81
5.3.4	Approximation des vecteurs propres: résultats et discussions	90
5.4	Prédiction de la réponse maximale	98
5.4.1	Introduction	98
5.4.2	Méthode de projection directe	98
5.4.3	Croisements de modes	103
5.4.4	Comparaisons des prédictions avec les méthodes de Monté Carlo, de perturbations et PMO	106
5.4.5	Comparaison des temps de calcul des trois méthodes	115
5.5	Synthèse de la nouvelle méthode	123
6	Conclusion	124
6.1	Perspectives	125
	ANNEXES	130
A	Variance de l'énergie cinétique spécifique: calcul complet	131
A.1	Référence	131

A.2	Première étape: expression de la variance	131
A.3	Deuxième étape: développement de l'équation de variance	132
B	Hybridation des méthodes de perturbation et de Monté Carlo: calculs de la	
	moyenne et variance globales	135
B.1	Référence et rappel du problème	135
B.2	Calcul de la moyenne globale	136
B.3	Calcul de la variance globale	136
C	Organisation des fichiers Matlab	138
C.1	Introduction	138
C.2	Organisation globale	138
C.3	Sous-programmes communs	139
C.4	Sous-programmes spécifiques	139
	BIBLIOGRAPHIE	144

Liste des figures

2.1	Vue d'ensemble du problème: entrée, sortie, et code d'éléments finis modifié.	6
2.2	Distinction entre la variation spatiale du champ et la longueur de corrélation.	15
2.3	Position des points de simulation pour la méthode de Rosenblueth.	28
4.1	Organigramme simplifié de la méthode de Monté Carlo.	39
4.2	Loi normale centrée réduite \mathcal{N}	41
4.3	Organigramme simplifié de la méthode de perturbations d'ordre 2.	44
4.4	Représentation graphique de l'énergie cinétique spécifique et des sous-ensembles impliqués dans la définition de Σ	47
4.5	Méthode de perturbations multipoints pour une variable d'entrée: visualisation des sous-intervalles et de la loi supposée suivie par le paramètre d'entrée sur l'intervalle <i>complet</i>	58
4.6	Organigramme simplifié de la méthode de recherche de points modaux optimaux (PMO).	60
4.7	Fréquence propre tracée en fonction du paramètre x_1 : mise en évidence des 2 cas de l'algorithme d'optimisation.	64
4.8	Exponentielle $e^{-b_1(x_1-x_1^{(0)})}$ pour différentes valeurs de b_1	68
5.1	Modèles utilisés dans le mémoire pour étudier l'énergie cinétique spécifique maximale à l'aide des algorithmes de prédiction. Les variables indiquées sont incertaines sur la section considérée.	73
5.2	Premières déformées du portique, et premières fréquences propres moyennes. Le cercle représente le point d'application approximatif de la force.	74

5.3	Premières déformées du treilli, et premières fréquences propres moyennes. Les cercles représentent les points d'application approximatifs des forces.	75
5.4	Tableaux de propriétés de la méthode d'éléments finis PMO pour une poutre simplement supportée et 3 variables incertaines (par exemple).	77
5.5	Disposition schématique des points de simulation servant à l'approximation linéaire et quadratique des vecteurs propres et des fréquences propres, cas à 3 variables. . . .	82
5.6	Fonction racine carrée: mise en évidence de zones non linéaire et quasi linéaire. . . .	84
5.7	Demi-portique: première fréquence propre tracée en fonction de h_1 pour deux valeurs d'incertitude, 10 et 60%.	85
5.8	Demi-portique: deuxième fréquence propre tracée en fonction de h_1 pour deux valeurs d'incertitude, 10 et 60%.	86
5.9	Demi-portique: troisième fréquence propre tracée en fonction de h_1 pour deux valeurs d'incertitude, 10 et 60%.	87
5.10	Demi-portique: troisième fréquence propre tracée en fonction de h_1 pour 60% d'incertitude. Approximation cubique.	88
5.11	Vecteurs propres complexes: poids relatif des parties réelle et imaginaire, et variations des deux parties sous l'effet d'une modification des paramètres, abstraction faite de changements aléatoires de signes.	93
5.12	Demi-portique: premier vecteur propre (au point d'application de la force) tracé en fonction de h_1 pour deux valeurs d'incertitude 10 et 60%.	95
5.13	Demi-portique: deuxième vecteur propre (au point d'application de la force) tracé en fonction de h_1 pour deux valeurs d'incertitude 10 et 60%.	95
5.14	Demi-portique: troisième vecteur propre (au point d'application de la force) tracé en fonction de h_1 pour deux valeurs d'incertitude 10 et 60%.	96
5.15	Demi-portique: troisième vecteur propre tracée en fonction de h_1 pour 60% d'incertitude. Approximation cubique.	96
5.16	Demi-portique: énergie cinétique spécifique maximale tracée en fonction de h_1 au voisinage du mode 2 isolé, pour deux valeurs d'incertitude 10 et 30%. La méthode de Monté Carlo n'a pas totalement convergé en (b).	102

5.17	Effet de la largeur de l'intervalle d'incertitude sur la possibilité de croisement des modes l et k . Les hachures indiquent la zone de croisement. Sur cette figure, on suppose que les fréquences propres ont un comportement linéaire. On utilise une seule variable x_i en abscisse pour simplifier.	103
5.18	Croisement et décroisement des modes k et l . On utilise une seule variable x_i en abscisse pour simplifier. Les hachures indiquent la zone de croisement pour cet intervalle d'incertitude.	105
5.19	Demi-portique: énergie cinétique spécifique tracée en fonction de h_1 de 40 à 160 Hz, pour 0%, 20%, 40% et 60% d'incertitude. La méthode de Monté Carlo n'a pas encore convergé.	107
5.20	Demi-portique: énergie cinétique spécifique maximale pour 2% et 20% d'incertitude. —: PMO linéaire, -·-: Perturbations (ordre 1), ···: Monté Carlo (référence).	108
5.21	Demi-portique: énergie cinétique spécifique maximale pour 20% d'incertitude et deux valeurs d'amortissement structural: 0.01 et 0.2. —: PMO linéaire, -·-: Perturbations (ordre 1), ···: Monté Carlo (référence).	110
5.22	Demi-portique: erreur relative $\varepsilon_{\langle v_{max}^2(\omega) \rangle_{PMO}}$ tracée de 40 à 160 Hz pour 10% d'incertitude. Les pics à 60 et 100 Hz sont dus au faible décalage spectral des méthodes de Monté Carlo et PMO.	111
5.23	Demi-portique: erreur relative $\varepsilon_{\langle v_{max}^2(\omega) \rangle_{PMO}}$ tracée de 40 à 160 Hz pour 60% d'incertitude.	111
5.24	Demi-portique: participation dynamique (valeur absolue) et fréquence propre du mode 3 pour 60% d'incertitude. Influence des approximations des vecteurs propres et fréquences propres sur l'énergie cinétique spécifique maximale.	112
5.25	Demi-portique: erreur relative $\varepsilon_{\langle v_{max}^2(\omega) \rangle_{PMO}}$ tracée de 40 à 160 Hz pour 60% d'incertitude. Approximation cubique.	112
5.26	Treilli, énergie cinétique spécifique aux paramètres moyens.	114
5.27	Treilli, 10% d'incertitude: comparaison des énergies cinétiques spécifiques maximales. —: méthode de Monté Carlo, -·-: méthode PMO linéaire, ···: méthode de perturbations (ordre 1).	116

5.28 Treilli, 30% d'incertitude: comparaison des énergies cinétiques spécifiques maximales. —: méthode de Monté Carlo, —: méthode PMO linéaire, ...: méthode de perturbations (ordre 1).	117
5.29 Treilli, 60% d'incertitude: comparaison des énergies cinétiques spécifiques maximales. —: méthode de Monté Carlo, —: méthode PMO linéaire, ...: méthode de perturbations (ordre 1).	118
6.1 Interaction modules externes d'éléments finis / méthode PMO. La figure se lit de haut en bas pour respecter l'ordre chronologique des opérations.	128
6.2 PMO multinéaire: approximation linéaire par morceaux.	129
C.1 Vitesse quadratique: organisation des répertoires de travail et contenu principal de ces répertoires.	141
C.2 Structure déterministe: organisation des répertoires de travail et contenu principal de ces répertoires.	142
C.3 Vecteurs et valeurs propres en fonction d'un paramètre d'entrée: organisation des répertoires de travail et contenu principal de ces répertoires.	143

Liste des tableaux

4.1	Comparatif des temps CPU de diverses méthodes de dérivation des vecteurs et valeurs propres (cylindre raidi).	56
5.1	Propriétés physiques du demi-portique: sauf cas particulier, les valeurs s'appliquent à tous les éléments de chaque section. L'étoile indique une variable incertaine. . . .	73
5.2	Propriétés physiques du treilli: sauf cas particulier, les valeurs s'appliquent à tous les éléments de chaque section. Une étoile représente une variable incertaine. . . .	74
5.3	Treilli, trois variables incertaines: E_1 , ρ_1 et h_2 . Deux premières fréquences propres. Valeurs de l'indicateur en % pour des incertitudes croissantes.	89
5.4	Treilli, quatre variables incertaines: E_1 , ρ_1 , h_1 et h_2 . Deux premières fréquences propres. Valeurs de l'indicateur en % pour des incertitudes croissantes.	89
5.5	Treilli, cinq variables incertaines: E_1 , ρ_1 , h_1 , h_2 et η_1 . Deux premières fréquences propres. Valeurs de l'indicateur en % pour des incertitudes croissantes.	89
5.6	Treilli, trois variables incertaines: E_1 , ρ_1 et h_2 . Deux premiers vecteurs propres. Valeurs de l'indicateur en % pour des incertitudes croissantes.	97
5.7	Treilli, quatre variables incertaines: E_1 , ρ_1 , h_1 et h_2 . Deux premiers vecteurs propres. Valeurs de l'indicateur en % pour des incertitudes croissantes.	98
5.8	Treilli, cinq variables incertaines: E_1 , ρ_1 , h_1 , h_2 et η_1 . Deux premiers vecteurs propres. Valeurs de l'indicateur en % pour des incertitudes croissantes.	98
5.9	Nombre moyen de simulations effectuées pour des incertitudes variant entre 10% et 60%, méthode de Monté Carlo.	114

5.10 Treilli, comparaison des temps de calcul des méthodes de Monté carlo, PMO et perturbations pour 10% d'incertitude sur toutes les variables. Nombre de fréquences:	
25. Processeur Pentium 200 <i>MHz</i>	122

Chapitre 1

Introduction

1.1 Le contexte de l'étude

Des changements technologiques sans précédents se sont produits au vingtième siècle: révolution dans les domaines des télécommunications, des transports, de la maîtrise de l'énergie nucléaire, échanges économiques planétaires, modification des rapports de forces etc... Pourtant, ces progrès n'expliquent pas la complexité du monde physique. Au contraire, ils mettent en évidence la fragilité des théories les plus solides et leur caractère *approximatif*: l'exemple le plus frappant et le plus populaire est la théorie de la relativité.

Pourtant, les ingénieurs simulent le comportement des structures qu'ils imaginent en donnant aux variables qui interviennent (dimensions, module d'Young etc...) des valeurs très précises, sans se soucier des incertitudes associées aux processus de fabrication ou à divers facteurs incontrôlés: erreurs de mesures, vieillissement etc... La simulation n'est donc jamais l'image du comportement réel de la structure, mais de sa représentation virtuelle (sur papier). Pour répondre aux exigences de sécurité et de qualité des normes en vigueur, le recours à l'expérience sur modèle réduit est donc systématique. Comme le modèle réel n'est jamais identique au modèle numérique, il faut recalibrer le modèle numérique sur le modèle réduit par des opérations subtiles et mal comprises, qui rendent le processus de validation long, coûteux et pas toujours fiable. De plus, le modèle numérique recalé est spécifique au modèle réduit étudié: en théorie, il ne peut servir à valider d'autres structures globalement identiques, mais légèrement différentes dans les détails (tolérances, type de trempe ou qualité de l'acier par exemple). Dans ce contexte, il semble qu'un outil capable d'introduire

au niveau numérique toutes les incertitudes liées aux imprévus de conception et de fabrication permettrait de réduire les coûts de validation, et d'augmenter la qualité des produits finis par une meilleure compréhension de leur comportement. La prochaine section décrit sommairement les moyens disponibles.

1.2 L'incertitude dans les calculs vibratoires

Ce travail de maîtrise met l'accent sur les procédés de prédiction de la réponse d'une structure dont les paramètres physiques sont connus par leur moyenne et leur variance, ou leur valeur minimale et maximale. La réponse représente la variable étudiée par l'ingénieur. La variation simultanée des paramètres dans leur intervalle permet de faire varier la réponse entre son maximum et son minimum. Le maximum de la réponse est une donnée extrêmement précieuse puisqu'elle dicte le dimensionnement de la structure mécanique et son adéquation aux critères de coûts et de normes fixés par l'entreprise. Cette valeur est calculée par le programme. Dans le mémoire, l'énergie cinétique spécifique est la seule réponse étudiée par souci de simplification (voir la section avertissement au lecteur). Plus loin, l'énergie cinétique spécifique est symbolisée par $\langle v^2 \rangle$ (l'énergie spécifique a la dimension d'une vitesse au carré). Note: ne pas confondre avec la vitesse quadratique notée $\langle v_n^2 \rangle$.

Le moyen le plus simple d'obtenir les valeurs maximales de la réponse est la méthode de Monté Carlo: les valeurs des paramètres physiques (dimensions, module d'Young) sont tirées au hasard dans leur intervalle de variation pour former les données d'entrée du programme. La réponse maximale est recherchée parmi toutes les simulations effectuées. Pour des raisons évidentes de temps, cette technique n'est jamais utilisée à d'autres fins que la validation. En fait, il est nécessaire de faire appel à des moyens mathématiques détournés pour résoudre efficacement le problème. Les méthodes les plus utilisées sont l'optimisation sous contraintes (recherche opérationnelle et calcul infinitésimal), et les probabilités. Chacune des méthodes correspond à une philosophie différente. Il en est question en détail dans les prochains chapitres. En marge de ces outils assez communs se sont développés des techniques différentes, comme la logique floue et l'algorithmique génétique. Ces stratégies de recherche d'optimum (maximum ou minimum) se basent sur l'observation du monde réel:

- La structure non booléenne de l'information (logique floue).
- La sélection naturelle des éléments les mieux adaptés aux contraintes de leur milieu (algorithmique génétique).

Ces méthodes sortent du cadre de la maîtrise. Le lecteur trouvera des informations pertinentes dans les références données.

1.3 Le plan du mémoire

Le mémoire s'articule autour de deux chapitres d'intérêt général: le chapitre 2 fait un état des connaissances acquises sur le sujet des techniques de prévision de réponse en éléments finis (en portant l'accent sur les méthodes de perturbation et d'optimisation), et le chapitre 3 définit les objectifs du travail de maîtrise. Deux chapitres fondamentaux présentent ensuite les bases théoriques du projet (chapitre 4) et les résultats et discussions (chapitre 5).

Chapitre 2

Etat des connaissances

2.1 Introduction

La littérature qui concerne la formulation numérique par éléments finis des incertitudes en mécanique et vibro-acoustique est divisée en deux groupes: le premier étudie les structures déterministes auxquelles sont appliquées des excitations aléatoires (problème dit de "vibrations aléatoires"). Dans ce cas, la structure est caractérisée par une fonction de transfert classique, et les forces appliquées varient en phase et en amplitude, mais pas en position. Les méthodes d'analyse du signal (transformations de Fourier, fonctions de transfert équivalentes, etc...) s'appliquent parfaitement. La simulation de tremblements de terre constitue l'application la plus courante de cette modélisation. Le second groupe tient compte des imperfections de la structure (problème "paramétrique"). L'étude vibratoire en est difficile: grand nombre de variables en entrée, non linéarité du système vis à vis des variables structurelles (épaisseur, masse, module d'Young), incertitudes locales ou globales (par exemple incertitudes sur les joints d'étanchéité, sur les rivets, sur la position des forces). L'incertitude provient souvent d'un manque de connaissances sur le comportement mécanique des matériaux (usure, raideur variable...) et sur la modélisation des efforts. Le problème "paramétrique" concerne directement le travail de maîtrise.

Pour les problèmes paramétriques, les algorithmes classiques d'éléments finis sont insuffisants: la boîte noire qu'ils représentent (entrées, sorties) n'est plus valide. Dès les années 70, de nouvelles techniques sont incorporées aux codes. Elles empruntent largement à l'analyse fonctionnelle (développements en série), à la recherche opérationnelle (problèmes d'optimisation sous contraintes

et plans d'expérience) et aux statistiques multivariées (simulations complexes de champs de déplacements corrélés dans l'espace et/ou dans le temps, utilisées surtout en génie civil). L'objectif des recherches actuelles est double: améliorer les méthodes qui existent en temps et en qualité, et développer de nouvelles méthodes qui répondent à des besoins spécifiques: algorithmes génétiques et réseaux de neurones pour les problèmes NP-complets (problèmes à très grand nombre de possibilités), logique floue pour le génie civil et la robotique, etc... Chaque algorithme est une entité indépendante parfaitement intégrable à un code d'éléments finis modifié. Ce chapitre expose les travaux effectués dans le domaine de la vibro-mécanique et de la vibro-acoustique pour les structures dont les propriétés physiques sont imparfaitement connues. L'accent est mis sur l'application des méthodes les plus courantes aux éléments finis.

2.2 Position du problème

La figure (2.1) montre la vue d'ensemble du problème: un outil de calcul central (un code d'éléments finis quelconque) contient le modèle numérique d'une structure mécanique. En entrée du code, certaines propriétés de la structure sont connues uniquement par leur valeur maximale et minimale données par l'ingénieur. Les propriétés sont les suivantes:

- Les propriétés géométriques: dimensions, sections, courbures.
- Les propriétés matérielles: module d'Young, coefficient de Poisson, amortissement.
- Les propriétés extrinsèques: position et amplitude de l'excitation.

La sortie du module de calcul donne l'estimation des bornes maximale et minimale atteintes par une variable de réponse importante aux yeux de l'analyste. Dans la suite du mémoire, les réponses étudiées sont les valeurs et vecteurs propres ainsi que l'énergie cinétique spécifique (rapport de l'énergie cinétique sur la masse totale de la structure).

Chaque propriété d'entrée représente au moins une variable incertaine (on emploie aussi le terme de paramètre dans le mémoire): par exemple, une poutre formée de deux tronçons d'épaisseurs différentes et incertaines sont deux variables de la même propriété "épaisseur". Les deux épaisseurs sont traitées comme deux variables distinctes, sauf mention contraire.

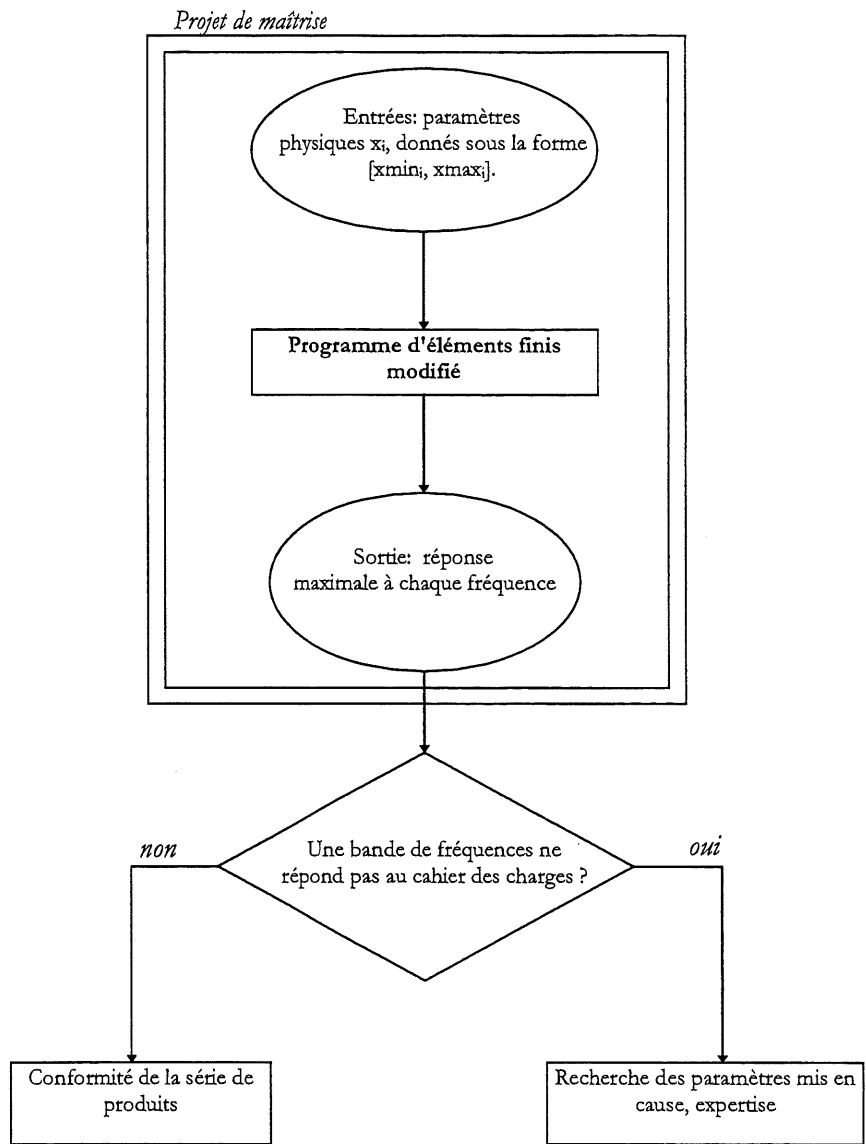


Figure 2.1: Vue d'ensemble du problème: entrée, sortie, et code d'éléments finis modifié.

Les incertitudes des paramètres d'entrée ne sont pas toutes équivalentes. Il existe deux types d'incertitudes:

- Les incertitudes systématiques ou statistiques (incertitudes de "forme"): Les variations de propriétés de la pièce elle-même (épaisseur, module d'Young...), les incertitudes liées aux conditions aux limites (rigidité d'interface, pour des fondations ou des collages par exemple), la position des forces d'excitation pour des assemblages hyperstatiques.
- Les incertitudes liées à la modélisation (incertitudes de "fond"): la compétence de l'analyste, la fiabilité du logiciel, les hypothèses simplificatrices (par exemple, supposer que l'amortissement est indépendant de la fréquence d'excitation). Ce type d'erreur dépend de l'avancement de la recherche fondamentale.

Dans ce mémoire, *les modèles théoriques ne sont pas remis en question*. On laisse ainsi une certaine latitude à l'ingénieur pour choisir le modèle le plus élaboré au moment de la modélisation. L'ensemble des valeurs d'entrées qui sont incertaines constitue l'espace des paramètres. Les paramètres considérés n'ont jamais *aucun rapport au temps*.

Enfin, certaines hypothèses de base sont formulées: linéarité du modèle numérique pour un ensemble de paramètres d'entrée donné, limites de la modélisation (par exemple, dans un modèle simple de poutre, le ratio épaisseur sur longueur est majoré pour satisfaire l'hypothèse de Bernoulli).

2.3 Historique et généralités

2.3.1 Historique des méthodes de prédiction

Pour prédire le maximum ou le minimum d'une réponse, la fonction qui la représente doit être connue avec une assez grande précision pour un minimum de points (par exemple, pour une réponse linéaire dépendant d'un seul paramètre, la connaissance de deux points permet de prédire le comportement en tout autre point). Malheureusement, la réponse est souvent très complexe et sa forme explicite inaccessible. En plus, la réponse ou les paramètres sont naturellement soumis à des contraintes: ne pas dépasser une certaine valeur par exemple.

Deux phases chronologiques marquent l'évolution des idées dans ce domaine. La première commence à la fin de la Renaissance (Galilée essaie déjà de trouver la forme qui confère à une poutre en flexion sa plus grande résistance pour le plus petit poids) . Etant donnée l'absence d'outils mathématiques puissants à cette époque, l'essentiel des travaux porte sur la formulation du problème en termes d'équations différentielles paramétriques non linéaires et en termes de contraintes. La fonction elle même représente une mesure de la performance d'un système. La fonction est souvent simplifiée par un développement en série de Taylor à l'ordre un ou deux. Au 17^{ième} siècle, Lagrange permet de lever la difficulté posée par les contraintes en inventant une fonction augmentée de multiplicateurs. L'inconvénient majeur de la linéarisation par développement de Taylor est que les paramètres doivent avoir une très faible amplitude pour que les résultats numériques restent valides. Par conséquent, *ordre du développement et précision sont liés*. Un autre problème intrinsèque à la méthode vient de la difficulté à résoudre les équations différentielles obtenues. Une étape importante est franchie lorsque Bernoulli, Euler et Lagrange proposent un principe variationnel pour résoudre les équations avec contraintes, en démontrant que la solution minimise toujours la fonctionnelle. Au 18^{ième} siècle, Hamilton étendra la théorie des équations d'Euler à un plus grand nombre de forces et à la dynamique de Newton.

La deuxième phase chronologique correspond à la création de deux méthodes de calcul: la première assoit ses résultats sur les principes variationnels et les développements en séries, qui sont applicables aux éléments finis: ce sont les méthodes de perturbations. La seconde considère qu'il faut séparer l'analyse du problème et le concept d'incertitude ou de design optimum: ce sont les méthodes d'optimisation. Les méthodes d'optimisation sont les plus récentes (19^{ième} et 20^{ième} siècles), car leur formulation appelle des outils mathématiques complexes et des puissances de calcul inconnues avant (itérations nombreuses). Parmi les noms les plus célèbres de cette discipline, il faut retenir G. Dantzig [16] (1948) pour la programmation linéaire (méthode du simplex, applicable aux réponses linéaires des paramètres), J.B. Rosen [67] [68] (1961) pour le gradient projeté (ancêtre du gradient conjugué), J.E. Kelley [43] (1960) pour la méthode SLP (Sequential Linear Programming, qui est une extension de la méthode de programmation linéaire au cas non linéaire), et M.J.D Powell [62] (1978) pour la méthode SQP (Sequential Quadratic Programming, qui est une méthode de programmation quadratique itérée). Quelques détails de méthodes intéressantes pour ce projet sont donnés plus loin.

Depuis l'avènement des ordinateurs, les deux voies se sont souvent rapprochées: elles empruntent souvent l'une de l'autre, car les méthodes de perturbations sont rapides, tandis que les méthodes d'optimisation sont précises. Les concepts de base sont très simples: **la méthode de perturbations** utilise un développement en série des paramètres d'entrée incertains (connus par leur minimum et maximum) pour simplifier la fonctionnelle, de la même façon qu'on linéarise les déplacements, supposés petits. Le développement est effectué au voisinage de la moyenne de chaque paramètre. Des techniques spécialisées permettent ensuite de calculer ou d'approximer le maximum ou minimum de la fonction réponse au voisinage de la moyenne, ou de calculer les premiers moments de la loi statistique de la réponse, connaissant la loi statistique des variables d'entrée. **La méthode d'optimisation** cherche directement les maxima et minima de la fonction réponse dans l'espace des paramètres d'entrée. La recherche de ces points nécessite de donner un point de départ et une stratégie de cheminement dans l'espace. Le nombre de pas qui permet de donner la solution doit être minimum, et de très nombreuses méthodes sont mises au point pour des réponses de formes particulières, linéaires ou quadratiques. Dans ce projet, la réponse (énergie cinétique spécifique) n'est ni linéaire, ni quadratique et les méthodes d'optimisation sont inefficaces si elles sont appliquées telles qu'elles.

Les méthodes qui sont potentiellement utilisables dans ce projet sont toujours étudiées en termes d'intégration possible aux éléments finis. La méthode de perturbations s'y prête le mieux. Les méthodes d'optimisations demandent un plus grand recul vis à vis de la théorie et de l'interfaçage. Dans tous les cas, il est jugé important de faire quelques rappels sur les éléments finis.

2.3.2 Généralités sur la méthode des éléments finis: application à la prédiction des réponses

La méthode des éléments finis a été mise au point dans les années cinquante (R. Clough, 1960). Elle permet de traiter des systèmes complexes déterministes par assemblage de sous-systèmes simples, représentés par leurs matrices élémentaires. Les premières applications stochastiques (prédictions du comportement de systèmes excessivement complexes) ont d'abord traité des **excitations aléatoires** (la structure est totalement connue, mais la force d'excitation varie aléatoirement dans le temps). Malgré son intérêt limité dans le cadre de la maîtrise, ce cas mérite quelques commentaires. Il est assez simple à traiter car le terme incertain ou aléatoire (la force)

apparaît au second membre de l'équation matricielle caractéristique d'un problème de dynamique, avec $[M]$, $[K]$ et $[C]$ les matrices de masse, raideur et amortissement:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (2.1)$$

Un bon exemple de ce cas est l'excitation d'une aile par une couche limite turbulente. Une seule factorisation LU est donc nécessaire pour inverser la matrice d'impédance si le problème est résolu par une méthode de projection modale. La grande difficulté des excitations aléatoires est la modélisation correcte de la force. On peut connaître les excursions extrêmes du déplacement $\{u\}$ en connaissant seulement les excursions extrêmes de $\{F\}$, puisque le filtre de la structure est supposé linéaire. Le problème à excitation aléatoire se rencontre fréquemment en sismologie et en géophysique. Par exemple, Sigbjörnsson et Smith [73] (1980) calculent le mouvement d'une plate forme offshore soumise à une houle de direction aléatoire. La simulation de l'excitation peut être réalisée par identification au spectre de Fourier d'une excitation réelle. Si les équations du mouvement sont non linéaires (grands déplacements), elles sont d'abord linéarisées par une méthode de moindre carrés, c'est à dire que l'équation du mouvement est remplacée par l'équation (2.1) en minimisant un terme d'erreur (voir par exemple T.K. Caughey, [14] 1963). Quelques chercheurs ont montré comment modifier les logiciels d'éléments finis qui existent pour tenir compte d'excitations aléatoires: Pfaffinger [61] (1981) propose une modification du code de calcul ADINA pour estimer le comportement extrême d'une structure déterministe sous excitation aléatoire, à l'aide, encore, de la transformée de Fourier.

Avec l'accroissement des puissances de calcul, il devient aussi possible de traiter efficacement des problèmes avec **paramètres incertains**, les matrices de raideur, masse et amortissement devenant des fonctions des paramètres d'entrée. Ce cas intéresse directement le projet de maîtrise. Des travaux anciens ont facilité l'implantation de la méthode: en 1963, Soong et Bogdanov [76] utilisent la technique de la matrice de transfert pour comprendre le comportement d'une chaîne simple de systèmes masse-ressort. Dans cet assemblage, l'une des masses ou l'un des ressorts a une valeur variable, représentative de l'incertitude qu'on donne aux valeurs de masse et raideur. Ils ont conclu que même une faible quantité de données inconnues provoque une grande dispersion des plus hautes fréquences de résonance, mettant ainsi en lumière la sensibilité de la réponse à des variations

d'entrée.

L'application des modèles de perturbations ou d'optimisation aux codes d'éléments finis classiques est regroupée sous l'acronyme SFEM (Stochastic Finite Element Method). Ces méthodes étudient la prédiction des réponses en statique et dynamique, et l'amélioration des designs des pièces (plus faible poids, moindre coût, plus grande résistance). Les SFEM sont souvent un mélange de méthodes de perturbations pour linéariser les équations et de calculs statistiques pour trouver la réponse maximale, mais les méthodes sous-jacentes sont diverses. En particulier, la méthode de perturbations et le calcul statistique sont remplacés quelques fois par des techniques d'optimisation, comme on l'a mentionné. La section suivante brosse un rapide tableau des SFEM.

2.4 Les éléments finis stochastiques

La résolution d'un problème d'éléments finis dont les paramètres d'entrée sont incertains se fait en trois étapes:

1. La définition des variables incertaines, ou des champs incertains.
2. la discrétisation appropriée du domaine.
3. Le calcul par éléments finis lui-même, qui comporte encore de nombreuses sous-étapes modulaires (c'est à dire relativement indépendantes les unes des autres, ce qui est très intéressant pour reconvertir des codes classiques comme NASTRAN).

2.4.1 Première étape: variables et champs incertains ou aléatoires

Dans la suite du texte, on emploie "aléatoire" pour "incertain", c'est à dire que les paramètres d'entrée peuvent prendre une valeur quelconque entre leur minimum et leur maximum avec une certaine probabilité. On définit *un champ aléatoire* comme une grandeur aléatoire (l'épaisseur, la surface, le moment d'inertie etc...) qui prend des valeurs différentes et aléatoires en différents points de l'espace. Si les valeurs sont identiques en tout point de l'espace défini par la structure ou la sous-structure, le champ est uniforme: la connaissance du champ en un point le définit tout entier. Dans cet unique cas, le champ aléatoire se réduit à *une variable aléatoire* (pas de variation spatiale).

Dans un champ non uniforme, chaque point dépend de ses voisins (ce qu'on appelle *l'intracorrélation*): le niveau de dépendance est appelé *longueur de corrélation*. Un tissu étendu sur la surface d'un liquide et soulevé en un point précis donne une idée de la longueur de corrélation: c'est la distance projetée sur le fluide qui sépare le point soulevé et les points touchant le fluide. On peut noter qu'un champ uniforme a une longueur de corrélation infinie.

Dans la réalité, les variables et les champs aléatoires sont aussi *intercorrélés*: par exemple l'expression des fréquences propres d'une poutre simplement supportée Eq. (2.2) montre que la loi statistique suivie par la fréquence dépend des lois statistiques de chaque variable d'entrée (la longueur L , le module d'Young E , le moment de la section I , la masse volumique ρ et la surface de la section droite S). Comme la relation mathématique reliant les différentes variables est en général inconnue pour des systèmes même simples, il est très difficile d'inférer la loi de la réponse connaissant la loi des entrées (méthode numérique indirecte). En général, on essaie de déterminer *directement* la loi de la réponse (méthode numérique directe) en calculant certains indicateurs statistiques comme la moyenne et l'écart type: c'est la voie qui est suivie dans ce travail chaque fois qu'une information statistique est demandée (méthode de perturbations, dans ce chapitre). L'intercorrélation est un facteur particulièrement favorable au biasage des lois statistiques des variables de réponse.

$$\omega_k = \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (2.2)$$

La notion de champ aléatoire est importante si l'ingénieur est capable de décrire le champ. Cette donnée est souvent inconnue, parce qu'elle demande un très gros effort de mesure. Plus fréquemment, l'ingénieur évalue seulement les écarts maximum. Le sens pratique du projet a donc fait porter les efforts sur les champs uniformes. Cependant, il existe des situations réelles où le champ doit être modélisé dans l'espace, pour les tremblements de terre ou le phénomène de houle sur l'océan par exemple. Un tel champ ne doit pas être modélisé par une juxtaposition de petits champs uniformes (champs modélisés par "éléments finis"), en raison même de la loi statistique qui lie tous les points du champ. Pour avoir une information actuelle très théorique sur le sujet de la modélisation des champs aléatoires, le lecteur peut consulter le livre de Ghanem et Spanos [26] (1990). En particulier, le champ est modélisé grâce au développement en série de Karhunen-Loeve (Karhunen [42] 1947, Loeve [54] 1948) qui s'apparente à un développement en série de Fourier sur une base de polynômes orthogonaux spéciaux. Ce développement est d'ailleurs très utilisé en

compression d'images (Devijver et Kittler [19] 1982).

2.4.2 Discrétisation

Le type de chaque variable définit la discrétisation adoptée. Pour un **champ uniforme**, il n'est pas utile de définir un maillage différent de celui de la structure déterministe. Pour un **champ non uniforme**, le maillage doit être à la fois suffisamment fin pour assurer une bonne précision des résultats, et plus large que la longueur de corrélation (voir la section 2.4.1), sinon, il faut tenir compte dans la formulation du fait que chaque point *d'un même élément* a des propriétés statistiques différentes. Dans un souci de simplification, il est préférable d'introduire la notion de corrélation statistique *entre les éléments plutôt qu'à l'intérieur des éléments*.

Pour tenir compte de la contrainte dimensionnelle des éléments, Vanmarcke et Grigoriu [81] (1983) définissent une échelle de fluctuation des grandeurs et proposent son utilisation dans un code de calcul pour optimiser la dimension des éléments. Dans le même esprit, Chun-Ching Li et Der Kiureghian [49] (1992) proposent d'approximer le champ en minimisant une norme d'erreur. Der Kiureghian [47] (1985) propose aussi d'utiliser plusieurs maillages, l'un pour la structure, et l'autre pour les champs aléatoires. D'une façon générale, ces méthodes souffrent de complexité: leur introduction dans un code d'éléments finis est loin d'être évidente. En plus, il est très rare de pouvoir connaître un modèle numérique à ce degré de raffinement, et l'effort consacré doit être mis en balance avec la précision des résultats.

Connaissant la meilleure taille des éléments, quatre méthodes sont utilisées pour moyenner le champ non uniforme sur chacun d'eux.

- Discretisation du point milieu: la valeur du champ sur l'élément est égale à la valeur du champ au centre de l'élément.
- Moyenne locale sur l'élément (Beacher et Ingra [7] 1981).
- Interpolation du champ aux points nodaux (Liu et al. [51] 1986)
- Intégration directe dans les matrices de masse et de raideur élémentaires: méthode des intégrales pondérées de Takada et Shinozuka [78] (1989).

Cette dernière méthode n'est pas applicable à tous les champs aléatoires (comme l'amortissement). Zhu, Ren et Wu [86] (1992) donnent des détails clairs sur la méthode de moyenne locale. Enfin, les trois dernières méthodes convergent plus rapidement que la première.

Note importante: il faut éviter toute confusion entre la vitesse de variation d'un champ sur l'élément et la longueur de corrélation: par exemple, l'épaisseur d'une plaque peut fort bien varier d'une façon déterministe (augmentation globalement linéaire et connue) alors que la corrélation des points de la plaque est infinie (variation uniforme de l'épaisseur entre son maximum et son minimum), ou au contraire, presque nulle (voir figure 2.2). La longueur de corrélation n'est pas forcément "visible".

2.4.3 Le calcul par éléments finis

On distingue en 1997 deux tendances:

- Les méthodes de perturbations.
- Les méthodes d'optimisation.

D'une manière générale, les méthodes de perturbations visent à donner la valeur *approchée* de la variable de sortie lorsque les paramètres d'entrée sont modifiés (i.e. perturbés). La sortie est développée en série autour des moyennes des paramètres d'entrée. Seuls les premiers termes du développement sont conservés. Il existe un grand nombre de développements en série possibles: développement de Taylor, de Neumann, de Fourier, de Legendre etc... Le choix du développement dépend du problème, de la rapidité de convergence, de la facilité à calculer numériquement les coefficients de la série. Deux développements sont particulièrement intéressants: le développement de Taylor et le développement de Neumann. Ceux-ci sont présentés plus en détail à la section suivante.

Les méthodes d'optimisation ont un objectif très différent des méthodes de perturbation: l'espace des paramètres d'entrée est sondé d'une façon astucieuse dans le but de trouver le maximum et le minimum de la fonction de réponse. Par conséquent, la dimension de l'espace des paramètres ne joue pas sur la précision du résultat. Par contre, il est fort possible que la réponse possède plusieurs maxima ou minima locaux, ce qui allonge sensiblement le temps de recherche.

Les deux approches sont étudiées dans les sections suivantes.

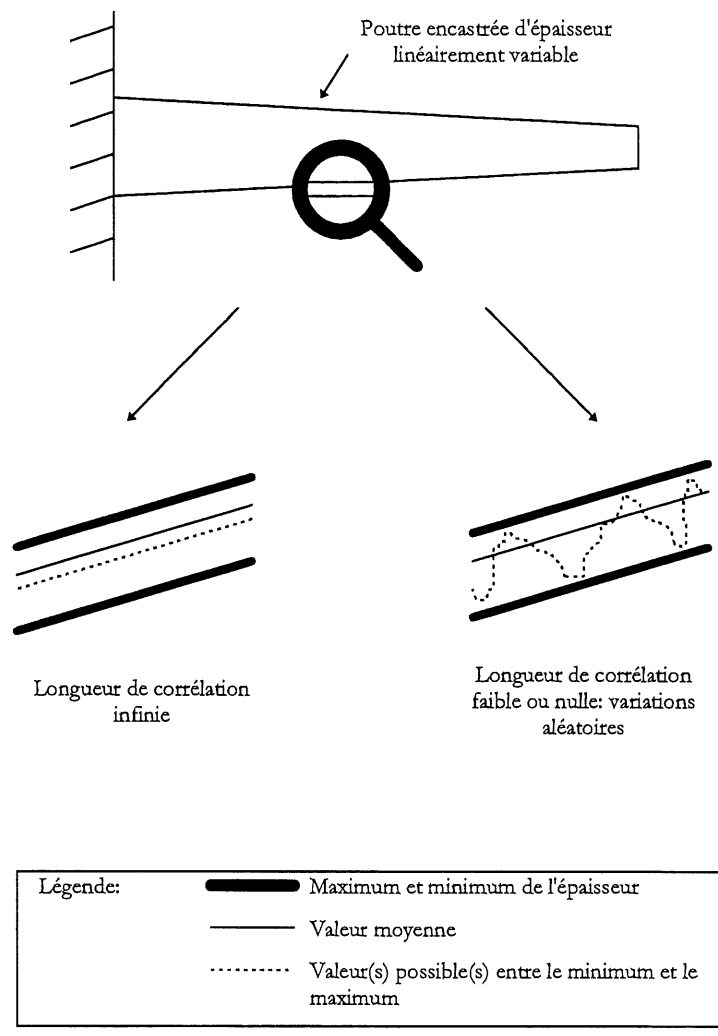


Figure 2.2: Distinction entre la variation spatiale du champ et la longueur de corrélation.

2.5 Les méthodes de perturbations

La littérature présente souvent deux techniques: la méthode de développement en série classique, et la méthode de Neumann. Il existe de nombreuses variantes pour chaque catégorie de problèmes, et les plus intéressantes sont présentées brièvement: méthode de développement réciproque, méthode multipoints...

2.5.1 L'approche développement en série de Taylor

Principe de base: soit $Y(x)$ la réponse d'une structure et x un paramètre d'entrée pouvant varier entre son maximum et son minimum. La réponse Y est d'abord développée en série de Taylor autour de la moyenne de x , notée \bar{x} . Puis la moyenne et l'écart type de Y sont calculés en appliquant les formules mathématiques adéquates (équations 2.3 et 2.4), en fonction de la moyenne \bar{x} et de l'écart type σ_x du paramètre d'entrée (moyenne et écart-type sont les deux premiers moments d'une loi statistique).

$$\bar{Y} = Y(\bar{x}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right)_{x=\bar{x}} \sigma_x^2 \quad (2.3)$$

$$\sigma_Y^2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)_{x=\bar{x}}^2 \sigma_x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right)_{x=\bar{x}}^2 \sigma_x^4 \quad (2.4)$$

Ensuite, maximum et minimum de la sortie se déduisent de l'inégalité de Tchebychev (équations 2.5 et 2.6). Le développement de Taylor de Y est effectué à l'ordre le plus grand qu'il est numériquement possible de calculer, c'est à dire deux ou trois (deux pour les équations présentées).

$$Y_{max} \simeq \bar{Y} + 3\sigma_Y \quad (2.5)$$

$$Y_{min} \simeq \bar{Y} - 3\sigma_Y \quad (2.6)$$

Les méthodes utilisant les deux premiers moments sont dites de *second moment*. L'ordre du développement étant deux, on a donc une méthode de second moment d'ordre deux (second order - second moment method en anglais). Les deux premiers moments et les deux premiers ordres ne sont pas toujours suffisants pour la précision des extrêmes, surtout si la sortie n'est pas linéaire ni quadratique, ou encore si l'intervalle de variation des paramètres (min et max) est grand.

Application aux éléments finis: l'idée du développement en série appliqué aux éléments finis revient à Cambou [12] (1975) et à Handa et Anderson [32] (1981) pour les problèmes statiques. Le

principe de la méthode est basé sur le remplacement d'une équation stochastique (comportant des paramètres incertains) par une infinité d'équations déterministes permettant de calculer *toutes* les dérivées de la réponse par rapport à tous les paramètres. En pratique, seules les dérivées premières et les dérivées secondes de la réponse (méthode d'ordre un et méthode d'ordre deux) sont accessibles en un temps numériquement acceptable, et avec une précision assez bonne. Aux ordres plus élevés, l'inversion des matrices d'impédance dans une méthode directe de résolution pose de grandes difficultés numériques. Pour donner une meilleure idée du problème, les équations principales sont synthétisées ci-dessous. On suppose qu'un paramètre aléatoire x de valeur initiale $x^{(0)}$ (la moyenne en général) rend la matrice de raideur incertaine. En remplaçant la matrice de raideur par son développement de Taylor à l'ordre un autour de $x^{(0)}$ (sur le principe des équations 2.3 et 2.4), il vient:

$$[K] = [K_0] + \left(\frac{\partial [K]}{\partial x} \right)_{x=x^{(0)}} \Delta x \quad (2.7)$$

avec

$$\Delta x = x - x^{(0)} \quad (2.8)$$

En remplaçant la matrice $[K]$ par cette expression dans l'équation (2.1) on obtient les équations séquentielles suivantes:

- Ordre 0:

$$[M]\{\ddot{u}_0\} + [C]\{\dot{u}_0\} + [K_0]\{u_0\} = \{F\} \quad (2.9)$$

- Ordre 1:

$$[M]\{\ddot{u}_1\} + [C]\{\dot{u}_1\} + [K_0]\{u_1\} = - \left(\frac{\partial [K]}{\partial x} \right)_{x=x^{(0)}} \{u_0\} \Delta x \quad (2.10)$$

- Ordre 2:

$$[M]\{\ddot{u}_2\} + [C]\{\dot{u}_2\} + [K_0]\{u_2\} = - \left(\frac{\partial [K]}{\partial x} \right)_{x=x^{(0)}} \{u_1\} \Delta x \quad (2.11)$$

avec

$$\{u_1\} = \left(\frac{\partial \{u\}}{\partial x} \right)_{x=x^{(0)}}, \{u_2\} = \left(\frac{\partial^2 \{u\}}{\partial x^2} \right)_{x=x^{(0)}} \quad (2.12)$$

et le déplacement final en x s'exprime finalement à partir du déplacement en $x^{(0)}$:

$$\{u\}(x) \approx \{u_0\} + \{u_1\}\Delta x + \{u_2\}\frac{\Delta x^2}{2} \quad (2.13)$$

Le choix de l'ordre 1 du développement de $[K]$ et 2 pour le déplacement $\{u\}$ est purement pédagogique. Suivant le paramètre x , un développement à l'ordre 2 pour $[K]$ peut être plus approprié.

La méthode qui vient d'être exposée est numériquement très avantageuse car les dérivées successives de $[K]$ gardent les propriétés de symétrie et de définition positive, et sont toujours de plus en plus creuses quand l'ordre de dérivation augmente. On peut donc leur appliquer des algorithmes très efficaces (par exemple les routines de la librairie SPARSKIT, de Youcef Saad [70] (1994)). Dans le domaine vibro-acoustique, ces équations sont le plus souvent résolues par projection sur la base modale. Pour un modèle d'amortissement proportionnel, il est commode d'utiliser les matrices $[K]$ et $[M]$ pour calculer cette base de vecteurs propres (méthode classique), car elle découple au moins l'équation du mouvement d'ordre zéro (membre de gauche). La grande difficulté de la projection est l'apparition inévitable des dérivées des vecteurs propres. Dans le chapitre suivant, on verra quelles sont les techniques utilisables. L'article de Sutter, Camarda, Walsh et Adelman [77] (1988) donne une bonne introduction au problème de calcul de ces dérivées. Pour les techniques spécifiques concernant uniquement les vecteurs et les valeurs propres, le lecteur peut consulter aussi:

- Iott, Haftka et Adelman [40] (1985): **méthode des différences finies**. Elle a deux inconvénients qui l'écartent d'un choix d'implantation: d'une part, la précision de la dérivée dépend du pas du schéma numérique *alors qu'aucun critère n'existe pour trouver le pas optimal*, et d'autre part il faut calculer un nombre non négligeable de vecteurs propres (trois par paramètre pour une dérivée première ou seconde). Très peu d'auteurs font référence à cette méthode.
- Fox et Kapoor [24] (1968), Wang [82] (1991): **méthode modale et modale accélérée**. La méthode modale innove en proposant *l'approximation* des dérivées au moyen de la série des vecteurs propres de modes successifs. Les coefficients de la série s'obtiennent facilement. Par contre la convergence est très lente, et pour y remédier, il faut calculer plus de vecteurs propres que n'en demande un simple problème déterministe. L'accélération modale repose sur

l'addition de termes correctifs à la série, au prix d'une baisse significative de la rapidité de la méthode.

- Nelson [59] (1976): **méthode exacte**. Nelson part de la dérivation du problème aux vecteurs propres et valeurs propres (équation 2.14). Cette technique complexe donne un résultat exact. Cette méthode est de plus très rapide. Elle a été choisie pour l'implémentation proposée dans ce travail.

$$([K] - \lambda_k[M])\{\Phi_k\} = \{0\} \quad (2.14)$$

Pour les dérivées secondes, le lecteur pourra consulter Kleiber et Hien [48] (1993), et Cao et Mlejnek [13] (1992). Enfin, de nombreux auteurs ont aussi proposé des versions qui tiennent compte de valeurs propres multiples (problèmes à symétrie géométrique): Song et al. [75] (1995).

L'approche par perturbations avec développement en série de Taylor est utilisée par Hisada et Nakagiri pour des incertitudes de formes [37] (1981), pour des incertitudes d'interface [35] (1980), pour des problèmes non linéaires [36] (1980), et par Nakagiri et Hisada pour des structures sur fondations élastiques [57] (1983), et enfin pour l'analyse dynamique d'un système avec un amortissement incertain [58] (1983). Une autre approche a été mise au point par Liu, Belytschko, Mani et Bersterfield [52] (1988), en prenant comme base de travail la fonctionnelle de Hamilton du mouvement d'un système, en posant (avec les conventions de notations de l'équation 2.12):

$$[K] = [K_0] + \left(\frac{\partial[K]}{\partial x} \right)_{x=x^{(0)}} \Delta x + \left(\frac{\partial^2[K]}{\partial x^2} \right)_{x=x^{(0)}} \frac{\Delta x^2}{2} \quad (2.15)$$

$$\{u\} = \{u_0\} + \epsilon\{u_1\} + \epsilon^2\{u_2\} \quad (2.16)$$

Ils égalent ensuite les termes de même ordre en ϵ dans l'équation obtenue. L'intérêt de ce travail réside dans l'emploi de la forme variationnelle, ce qui assoit la théorie des éléments finis stochastiques sur une base rigoureuse. Zhang Ru-ying et Gao Hang-shan [85] (1992) ont approfondi le problème, et Kleiber et Hien [48] ont synthétisé les résultats en 1993. Dès lors que l'outil a été au point, c'est à dire en 1988, il a été appliqué aux problèmes de couplage fluide-structure (K.J. Joo et K. Liu [41] 1988), mais sous une forme encore très complexe et théorique. De même, Liu, Lu et Chen [53] (1990) ont étudié le couplage d'un cylindre non parfait immergé dans l'eau par une

méthode de perturbations analytique. Depuis 1988, il existe très peu d'articles sur le sujet, car les auteurs semblent s'être toujours heurtés au coût numérique important des problèmes couplés.

Telle qu'elle a été présentée, la méthode des perturbations par développement de Taylor a quatre inconvénients:

- Le calcul des dérivées de matrices et de vecteurs pour chaque paramètre: on peut utiliser une forme exacte pour les éléments les plus simples (poutres), en dérivant analytiquement les matrices élémentaires (voir par exemple Deodatis [18], 1990), ou avec un schéma aux différences du type point milieu.
- Pour l'étude d'un transitoire, la résolution séquentielle des équations (2.9), (2.10) et (2.11) introduit des termes séculaires dans la réponse temporelle $\{u(x, t)\}$ (termes d'erreur qui submergent la solution après quelques itérations: en analyse modale, le problème n'existe pas). En effet, dans les équations (2.10) et (2.11) les termes de droite des égalités contiennent les fréquences de résonance du système déterministe de gauche, introduisant de ce fait des divergences parasites. Ces fréquences de résonance parasites sont éliminées par un filtrage approprié du membre de droite (Hien et Kleiber [34] 1990). En particulier, la transformée de Fourier de l'excitation équivalente doit être calculée.
- En pratique, il est difficile d'introduire des termes d'ordre supérieur à deux dans le développement de Taylor (Ghanem et Spanos [26] 1990). Or pour des intervalles d'incertitude des paramètres d'entrée importants (variation totale supérieure à 20 % en général de la valeur moyenne), et pour des comportements fortement non linéaires (autour des résonances), le développement restreint à l'ordre 2 est très insuffisant. On revient sur ce point au chapitre suivant.
- La forme séquentielle propage les erreurs de calcul et d'arrondis.
- Pour plusieurs variables, le développement de Taylor à l'ordre 2 fait apparaître les différentielles couplées (équation 2.17). Elles demandent un effort de calcul très important et souvent inutile, comme le montre Fleury [22] (1989). Toutefois, aucun critère ne permet de dire qu'on peut *toujours* se passer de les calculer.

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.17)$$

Ses principaux avantages sont:

- Sa simplicité.
- Elle fait référence à une forme variationnelle rigoureuse.
- Elle est utilisable en statique et en dynamique (domaine temporel et modal).
- La forme séquentielle est intéressante pour le faible coût en mémoire.

Perturbations et acoustique: En acoustique, les équations du problème couplé (fluide léger ou lourd) rendent l'étude stochastique par perturbations très difficile. La façon la plus rigoureuse d'introduire les perturbations des paramètres est proposée par K.J. Joo et K. Liu [41] (1988). Ils utilisent la forme intégrale faible du problème couplé en considérant que le champ de déplacement et la pression sont aléatoires. Depuis 1988, il n'a pas été donné à l'auteur du mémoire de lire un article de pointe sur ce sujet.

2.5.2 Complément sur le calcul du gradient $\frac{\partial \{u\}}{\partial x}$: variable adjointe

Méthode de la variable adjointe: dans la méthode de perturbations appliquée à une structure complexe, il est souvent plus intéressant d'étudier le comportement vibratoire d'une petite partie de la structure que son ensemble. La méthode de la variable adjointe permet justement de n'étudier que les degrés de liberté importants, en réduisant le nombre de calculs nécessaires pour les dériver. Supposons par exemple que le degré de liberté i soit important. Pour un problème statique traité par éléments finis et perturbé au premier ordre par rapport au paramètre x , les équations matricielles sont:

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (2.18)$$

et (dérivée de l'équation précédente par rapport à x):

$$[K]\frac{\partial \{u\}}{\partial x} = \frac{\partial \{F\}}{\partial x} - \frac{\partial [K]}{\partial x}\{u\} \quad (2.19)$$

On ajoute à ces deux équations l'équation (2.20), appelée équation adjointe. Le vecteur $\{\lambda\}$ est appelé vecteur adjoint, et $\{\delta_i\}$ est le vecteur de Dirac valant 1 au degré de liberté i et 0 aux autres degrés de liberté.

$$[K]\{\lambda\} = \{\delta_i\} \quad (2.20)$$

D'après l'équation (2.19), on extrait l'information suivante concernant la dérivée première du $i^{\text{ème}}$ degré de liberté du vecteur $\{u\}$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \{\delta_i\}^T [K]^{-1} \left(\frac{\partial \{F\}}{\partial x} - \frac{\partial [K]}{\partial x} \{u\} \right) \quad (2.21)$$

En utilisant ensuite l'équation adjointe (2.20), il vient:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \{\lambda\}^T \left(\frac{\partial \{F\}}{\partial x} - \frac{\partial [K]}{\partial x} \{u\} \right) \quad (2.22)$$

En pratique, la méthode de variable adjointe impose la résolution de l'équation adjointe pour trouver $\{\lambda\}$. Le nombre d'opérations élémentaires reste cependant très inférieur à celui d'un problème structural complet. La méthode est d'autant plus intéressante que le nombre de paramètres d'entrée et le nombre de degrés de liberté retenus sont faibles. Cette méthode est abordée de façon plus complète par H.M. Adelman et R.T. Haftka [1] (1986). La méthode de la variable adjointe est implémentée avec succès dans les dernières versions de NASTRAN par Chon [15] (1984). Cette technique est aussi adaptée à des problèmes contraints (conditions aux limites particulières) par Gurdal et Haftka [27] (1985). Arora et Govil [4] (1977) l'utilisent enfin pour les problèmes de sous-structuration. La méthode de la variable adjointe peut être particulièrement intéressante en acoustique si l'ingénieur sait quelles parties d'une structure rayonnent le plus, et sélectionner ainsi ces degrés de liberté: par exemple pour une coque les degrés de liberté en rotation ne contribuent pas au rayonnement. Si l'information de vitesse quadratique est exigée, il faut considérer tous les degrés de liberté d'une même surface rayonnante (déplacements normaux), ce qui limite un peu la portée de la méthode.

2.5.3 L'approche de Neumann

La méthode d'expansion de Neumann apparaît pour la première fois en éléments finis dans l'article de Shinozuka et Nomoto [71] en 1980. Elle a été proposée par Neumann au siècle dernier, puis étudiée par Fredholm [25] (1903). Elle ne requiert pas la dérivation des matrices selon les variables aléatoires, mais elle ne permet pas de calculer simplement la moyenne et la variance de la sortie, en raison de son caractère purement numérique. Pour la clarté de l'exposé, on considère le problème statique suivant:

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (2.23)$$

et la matrice de raideur décomposée en sa partie déterministe (sa moyenne) et sa partie aléatoire:

$$[K] = [K_0] + \Delta[K] \quad (2.24)$$

Le déplacement peut s'exprimer sous la forme:

$$\{u\} = ([K_0] + \Delta[K])^{-1} \{F\} \quad (2.25)$$

Si $\Delta[K]$ est petit vis à vis de $[K]$, on peut développer $\{u\}$ en série:

$$([K_0] + \Delta[K])^{-1} = ([I] - [P] + [P]^2 - \dots) [K_0]^{-1} \quad (2.26)$$

avec

$$[P] = [K_0]^{-1} \Delta[K] \quad (2.27)$$

La solution est donc donnée par l'équation suivante:

$$\{u\} = \{u_0\} - [P]\{u_0\} + [P]^2\{u_0\} - \dots \quad (2.28)$$

avec

$$\{u_0\} = [K_0]^{-1} \{F\} \quad (2.29)$$

Cette formulation est équivalente à l'équation récursive (2.30) du terme $i - 1$ au terme i . De fait, après le calcul de la décomposition de Cholesky de $[K_0]$ et du premier terme $\{u_0\}$, le calcul des $\{u_i\}$ est trivial, et d'autant plus rapide que $\Delta[K]$ est très creuse.

$$[K_0]\{u_i\} = \Delta[K]\{u_{i-1}\} \quad (2.30)$$

Le développement en série de l'équation (2.28) est arrêté si le critère suivant (nécessaire mais non suffisant) est vérifié:

$$\frac{\|\{u_i\}\|_2}{\|\sum_{k=0}^i (-1)^k \{u_k\}\|_2} \leq \epsilon \quad (2.31)$$

où ϵ représente l'erreur de convergence (Shinozuka et Yamazaki [72] utilisent 0.01) et $\|\cdot\|_2$ est la norme vectorielle définie par:

$$\|\{u\}\|_2 = \sqrt{\{u\}^T \cdot \{u\}} \quad (2.32)$$

Shinozuka et Yamazaki [72] rappellent que la suite (2.28) converge si les valeurs propres absolues de $[P]$ sont toutes inférieures à 1 (critère suffisant). Dans le cas contraire, il faut modifier astucieusement la matrice $[K_0]$ de sorte que les nouvelles valeurs propres de $[P]$ soient inférieures à 1, en posant par exemple:

$$[K] = [K_0]^* + \Delta[K]^* \quad (2.33)$$

avec

$$[K_0]^* = m[K_0] \quad (2.34)$$

où m est un scalaire choisi pour satisfaire le critère de convergence.

D'autres détails pertinents sur la méthode sont donnés dans l'article de Shinozuka et Yamazaki [72] (1988). En particulier, le développement de Neumann se prête peu à l'étude des premiers moments (moyenne et variance de la sortie). Par contre, il peut être utilisé comme base d'une simulation de Monté Carlo (la seule matrice générée pour chaque échantillon est $\Delta[K]$ dans l'équation 2.30). A titre de comparaison, Shinozuka et Yamzaki ont étudié un assemblage statique de 10000 degrés de liberté et un paramètre incertain avec une méthode de Monté Carlo directe (DMCS) et la méthode de Neumann à l'ordre 3 (NMCS). Leur échantillon comprend 100 tirages aléatoires entre le minimum et le maximum du paramètre. La méthode DMCS s'avère 50 fois plus lente que la méthode NMCS. Par contre, pour les petits systèmes (≤ 250 degrés de liberté), le gain est négligeable. Les auteurs montrent alors que la méthode de perturbations est beaucoup plus avantageuse. On souligne enfin que l'utilisation d'une telle méthode est possible en dynamique: la matrice d'impédance complexe $Z = [K] - \omega^2[M]$ remplace la matrice de raideur. La projection sur la base des vecteurs propres non perturbés donne l'équation récursive suivante (étape i):

$$[\Phi]^T [Z_0] [\Phi] \{q_i\} = [\Phi]^T (\Delta[Z]) [\Phi] \{q_{i-1}\} \quad (2.35)$$

La base des vecteurs propres n'étant calculée qu'aux valeurs initiales, la convergence de la méthode peut ne pas être optimale. Les déplacements approchés à l'étape i sont obtenus avec le changement de base suivant:

$$\{u_i\} = [\Phi] \{q_i\} \quad (2.36)$$

Malgré ses nombreux avantages, la méthode ne satisfait pas l'ingénieur pour les raisons suivantes:

- L'étude de la convergence de la suite demande le calcul des valeurs propres de $[P]$ (équation 2.27).
- La difficulté numérique à utiliser plus que deux termes dans l'expansion (Benaroya et Rehak [8] 1988).
- La méthode est incommode en dynamique, car un problème direct demande l'inversion à *chaque fréquence* de la matrice complexe $-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K]$. Elle est utilisée toutefois par Ghanem et Spanos [26] (1990) pour une poutre avec encastrement élastique.
- Pour plusieurs variables aléatoires, il n'existe pas de formulation simple. La matrice $\Delta[K]$ doit être subdivisée en sous-matrices pour traduire la perturbation due à chaque paramètre d'entrée. Le développement de Neumann fait alors apparaître les couplages intervariables que l'on néglige souvent (comme les termes croisés du développement de Taylor, section 2.5.1).

2.6 Méthodes d'optimisation

Les techniques d'optimisation sont classées en méthodes contraintes et non contraintes. Dans ce travail, seules les méthodes contraintes sont utilisées, puisque les paramètres d'entrée ont un intervalle de variations limité. D'autre part, la notion d'espace des variables devient très importante. Une fonction de deux variables x_1 et x_2 notée $Y(x_1, x_2)$ est représentée dans cet espace par une surface avec des maxima et des minima locaux et globaux. L'objectif est donc de localiser le plus rapidement possible les maxima et minima globaux. Il existe deux méthodes pour les localiser:

- L'approximation globale de la fonction, valide pour l'espace des paramètres au complet (cette approximation est très différente de celle que propose la méthode de perturbations).
- L'approximation locale, vraie uniquement autour d'un point. En général, plusieurs approximations locales sont effectuées sur la courbe pour se diriger vers le sommet ou la vallée (noter que le développement de Taylor est une approximation locale autour d'un point).

2.6.1 Les approximations globales et mixtes

L'approximation globale simple ou RSA (Response Surface Approach): la surface est entièrement modélisée grâce à un réseau plus ou moins dense de points répartis uniformément ou aléatoirement. Dépendamment de la qualité de la surface obtenue, le maximum est trouvé directement, ou la surface sert de point de départ à une analyse plus fine. Il n'existe pas de critère qui donne le nombre minimal de points d'échantillonnage si la surface réelle n'est pas connue (c'est toujours le cas en éléments finis). La construction des surfaces repose sur la théorie des plans d'expériences (voir Box et Draper [9] 1987, ou Montgomery [56], 1991). Les approximations linéaires sont les plus courantes, mais elles donnent des résultats tout à fait erronés si la variable approchée n'est pas quasi-linéaire. Il faut alors augmenter considérablement le nombre de points de mesure. Pour n variables d'entrée x_i , l'approximation linéaire de la sortie $Y(x_1, \dots, x_n)$ est donnée par l'équation (2.37) à $n + 1$ coefficients inconnus a_i :

$$Y = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n + \epsilon \quad (2.37)$$

Le nombre d'applications de la méthode RSA est assez limité: Barthelemy et Haftka [5] (1992) donnent l'exemple de Brown et Nachlas [11] (1985) pour un cône de missile en matériau composite à 3 couches. L'orientation des couches devait être optimisée pour maximiser la résistance et minimiser le poids. Avec 4 variables par couche et 7 valeurs possibles pour chacune, une étude exhaustive aurait demandé 2401 analyses. En fait, seuls 28 points ont été suffisants. Malgré cela, la méthode RSA est limitée aux problèmes de petite taille (faible nombre de variables d'entrée) à cause de son coût numérique prohibitif. Par contre, elle se prête bien à la parallélisation massive: dans un avenir proche, elle pourrait supplanter les techniques complexes utilisant les gradients.

Les méthodes semi-statistiques: elles sont apparentées aux plans d'expérience et sont développées par Rosenblueth [69] (1975). Rosenblueth propose une alternative intéressante pour diminuer le plus possible le nombre de points simulés tout en conservant une information importante sur la dispersion des résultats. Cette méthode est nommée PEPM (Probability Estimation Point Method). Dans la méthode de Rosenblueth, on estime par des calculs simples la moyenne et l'écart-type de la sortie $Y(x)$ connaissant deux réalisations particulières de Y : l'une en $x + \sigma_x$, ce qui donne Y_+ , et l'autre en $x - \sigma_x$, ce qui donne Y_- . On déduit la moyenne \bar{Y} de Y et son écart type

σ_Y :

$$\bar{Y} \simeq \frac{Y_+ + Y_-}{2} \quad (2.38)$$

$$\sigma_Y \simeq \left| \frac{Y_+ - Y_-}{2} \right| \quad (2.39)$$

Pour n variables x_1, x_2, \dots, x_n *non corrélées*, $2n$ simulations sont suffisantes en prenant chaque variable sauf une à sa valeur moyenne. Pour trois variables, le tirage est donc représenté par le premier schéma de la figure (2.3). Pour n variables *corrélées*, le nombre de simulations est de 2^n (on tient compte de la corrélation en affectant un coefficient d'influence à chaque variable d'entrée). Le schéma 2 de la figure (2.3) donne le tirage pour trois variables. Dans certains cas (grand nombre de variables, non linéarités) la méthode de Rosenblueth est moins efficace que la méthode de Monté Carlo. Harr [33] (1989) ramène le nombre de tirages de 2^n à $2n$ en passant dans l'espace des variables décorréées (problème aux valeurs propres et vecteurs propres). Ceci suppose de connaître la nature de la corrélation (souvent inaccessible).

La méthode a eu quelques développements intéressants: Rosenblueth a montré que le développement de Taylor à l'ordre deux donne les mêmes résultats que sa méthode, créant ainsi un lien indirect et insoupçonné entre les plans d'expériences et les perturbations. Il existe aussi des méthodes de type "Rosenblueth" plus précises à 3 ou 4 points (Hahn et Shapiro [29] 1967, Ditlevsen [20] 1981), mais il faut connaître les moments d'ordre 3 et 4 (en anglais: skewness et kurtosis) de la loi que suivent les variables d'entrée, et il faut pouvoir répartir les tirages équitablement dans l'espace des variables. Ces informations sont difficiles à calculer. Il est aussi possible de combiner la méthode des perturbations et la méthode PEPM (C. Zoppou et K.S. Li [87] 1993), en appliquant le schéma de Rosenblueth aux dérivées de la réponse. Celle-ci est d'abord développée en série de Taylor autour des moyennes des paramètres d'entrée. Zoppou et Li montrent que le nombre de simulations pour n variables d'entrée corrélées est ainsi réduit de 2^n à $(n^2 + 3n + 2)/2$, ce qui est beaucoup plus efficace que la méthode de Rosenblueth pour $n > 3$, mais quand même moins efficace que la méthode Monté Carlo pour un grand nombre de variables. Pour une utilisation approfondie de la méthode PEPM, le lecteur peut se référer à la synthèse de K.S. Li [50] (1997). La méthode PEPM et ses dérivées sont utilisées en dynamique transitoire par Zoppou et Li dans l'article précédemment cité ([87]) pour simuler l'écoulement de l'eau dans un bassin.

Les méthodes purement statistiques: elles utilisent une transformation peu étudiée:

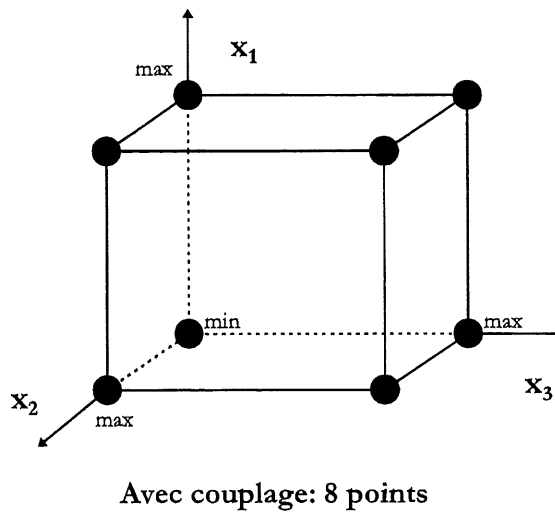
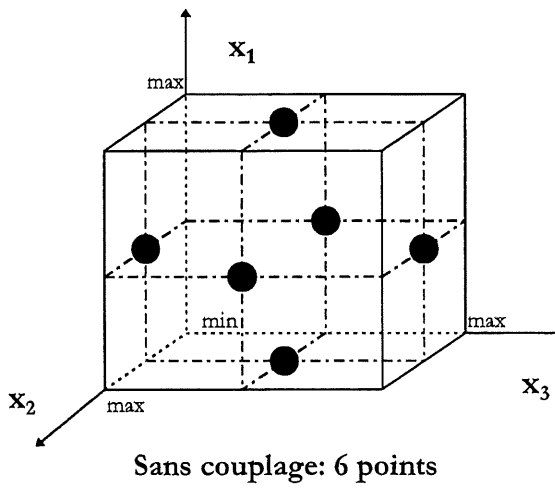


Figure 2.3: Position des points de simulation pour la méthode de Rosenblueth.

la transformation de Mellin. Celle-ci est utilisée par Tung [79] (1990) pour la modélisation d'écoulements. La transformation de Mellin d'une fonction f est l'application linéaire f^* définie par:

$$f^*(s) = \mathcal{M}_x(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx \quad (2.40)$$

Comme pour les transformées de Fourier ou de Laplace, il existe une correspondance univalente entre $f^*(s)$ et $f(x)$. Si f est la fonction de distribution de la variable aléatoire x , il existe une relation entre la transformée de Mellin de cette fonction et les moments de la variable x . En effet, si $m_{s-1}(x)$ désigne le moment d'ordre $s - 1$ de x à l'origine et $E[.]$ l'application espérance mathématique, on a:

$$m_{s-1}(x) = E[x^{s-1}] = \mathcal{M}_x(s) \quad (2.41)$$

Le but de la transformation de Mellin est de simplifier la détermination de la loi statistique d'une fonction $Y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variables aléatoires x_1, x_2, \dots, x_n , connaissant les lois de chacune des variables. Un grand nombre de propriétés opérationnelles sur les transformées de Mellin ont été établies par Bateman [6] (1954) et Park [60] (1987). Connaissant par exemple la loi de chacune des variables aléatoires d'une expression telle que $z = x^a y^b$, la transformée de Mellin de z vérifie l'équation (2.42), d'où il est possible de déduire la loi suivie par z (transformée de Mellin inverse). Avec la transformée de Mellin, il est donc possible d'établir la loi d'une combinaison de variables aléatoires dans l'espace de Mellin.

$$\mathcal{M}_z(s) = \mathcal{M}_x(as - a + 1)\mathcal{M}_y(bs - b + 1) \quad (2.42)$$

Dans le projet de maîtrise, cette technique pourrait être intéressante, puisqu'on calcule "analytiquement" la loi statistique de la réponse pour ensuite trouver son maximum le plus probable. Cependant, la transformation n'est pas applicable aux problèmes rencontrés en éléments finis stochastiques: d'une part, l'expression des réponses en fonction des paramètres d'entrée n'est pas connue, et d'autre part, la transformée de Mellin n'est pas définie pour la somme de variables aléatoires de lois différentes. Ces raisons expliquent facilement le peu d'application de la transformée, à moins qu'une méthode numérique rapide ne permette le calcul des intégrales de Mellin (d'une façon analogue à la transformée de Fourier rapide).

Les réseaux de neurones, méthode exhaustive: les réseaux de neurones virtuels ont été développés par Hajela et Berke [31] (1990) pour ajuster progressivement une surface de recouvrement à la surface réelle. Chaque neurone est un processeur qui échange l'information avec les processeurs qui lui sont connectés. De plus, le neurone peut être entraîné à fournir une réponse en un temps minimum. Malgré leur différence, les réseaux de neurones et la méthode RSA ont à peu près les mêmes avantages et les mêmes défauts: elles acceptent des données en entrée qui sont aussi bien simulées qu'expérimentales, elles s'adaptent assez bien à une augmentation du nombre de variables en entrée. Par contre, elles sont très coûteuses et demandent beaucoup de calculs de front. En plus, la technique des réseaux de neurones est assez complexe: elle ne peut pas être adaptée aux logiciels existants sans de profondes transformations.

2.6.2 Les approximations locales

Les approximations locales sont toujours basées sur un développement en série de la sortie. Pour cette raison, méthodes d'optimisation et méthodes de perturbation se rejoignent sur la modélisation de la réponse par un polynôme. L'utilisation diffère mais les techniques exposées ici servent donc les deux disciplines. Barthelemy et Haftka [5] (1992) font une synthèse complète des variantes de la méthode de perturbations classique par série de Taylor. Les progrès touchent surtout les techniques d'extraction du maximum d'information du minimum de points de mesures. Les auteurs montrent qu'il est parfois souhaitable de modifier le développement en série de sorte qu'il s'adapte mieux au comportement réel de la réponse, en conservant toujours et seulement les termes de plus bas degré (en général, seulement le terme linéaire). La technique la plus courante est **l'approximation réciproque**: la réponse Y est développée (Taylor) en fonction de l'inverse de la variable d'entrée x . L'inverse peut être une variable intermédiaire, notée z :

$$z = \frac{1}{x} \quad (2.43)$$

D'autres variables intermédiaires sont proposées: Haftka et Shore [28] (1979) ajoutent une constante à x pour éviter que z ne tende vers l'infini lorsque x s'approche de 0, Prasad [63] (1983) propose l'emploi d'exponentielles $z = x^p$ avec une puissance plus ou moins arbitraire. La plupart des applications de l'approximation réciproque concernent les éléments de poutre ou de plaque en contraintes planes. Les variables d'entrée les plus utilisées sont typiquement l'épaisseur et les aires

de section si les variables de sortie sont la contrainte ou le déplacement. En effet, l'approximation réciproque établit alors une relation de linéarité entrée / sortie.

2.6.3 Localisation des maxima et minima

Connaissant approximativement la forme de la réponse (avec les méthodes exposées ci-dessus par exemple), les techniques de recherche des extrêma sont très variées, et souvent déjà implantées (sous-routines en FORTRAN). Parmi les plus intéressantes, on a cité les **méthodes SLP et SQP** (section 2.3.1) qui cherchent le maximum ou le minimum de la fonction réponse en fonction des contraintes. L'efficacité de la méthode SLP tient à la forme algorithmique très simple, mais elle doit être appliquée à des réponses presque linéaires. Un exposé plus complet de cette méthode est présenté au chapitre suivant (car c'est la méthode qui a été choisie dans l'implantation numérique de ce travail). La méthode SQP ainsi que d'autres méthodes de gradient et de pénalités mises au point récemment sont expliquées avec une grande clarté dans le livre de Singiresu [74] (1996).

2.6.4 Nouvelles méthodes et technique de ré-analyse

Parmi les méthodes intéressantes pour traiter les problèmes très complexes (grand nombre de paramètres d'entrée), ou posés en termes imprécis, quelques méthodes permettent de trouver les maxima et minima en un temps minimal. On cite en particulier:

La méthode des algorithmes génétiques: les premiers travaux sur les algorithmes génétiques ont été présentés par Holland [38] (1975), et les idées de bases sont présentées un peu avant par Rechenberg [66] (1965). Une population de points est choisie dès le début de l'algorithme (si n est le nombre de paramètres d'entrée, ce nombre est typiquement de $2n$ à $4n$). Les paramètres d'entrée sont représentés par des chaînes de nombres binaires, chaque chaîne jouant le rôle d'un chromosome porteur d'information. Les chaînes sont croisées suivant des lois génétiques précises qui permettent de sélectionner les individus les plus aptes à atteindre un but précis, par exemple celui de trouver le minimum d'une fonction. La technique est applicable à des variables discrètes (l'application à des variables continues passe par une discretisation). Son application aux éléments finis demande une quantité importante de calculs du même ordre de grandeur que la méthode de Monté Carlo.

La méthode de "recuit simulé" (*simulated annealing*) ou SA: cette technique est présentée

par Kirkpatrick, Gelatt et Vecchi [44] dans le journal *Science* en 1983. En 1953, Metropolis et al. [55] en proposent la première application numérique. La méthode est basée sur l'évaluation semi-aléatoire de la réponse. La SA permet d'évaluer les maxima et minima *globaux* assez rapidement, même si la réponse possède de nombreux minima et maxima *locaux*. A partir d'un point initial de l'espace des paramètres (dans lequel la fonction réponse est représentée), les déplacements vers le minimum ou le maximum se font successivement selon chaque axe, c'est à dire chaque paramètre. Pour rechercher un minimum global, si le nouveau point descend il est conservé; s'il monte, il est conservé et affecté d'une probabilité inférieure à 1, calculée selon un principe qui ressemble à celui des niveaux d'énergie atomiques. Plusieurs coefficients dirigent le calcul de la probabilité. Hajek [30] (1988) a fait une étude paramétrique avec ces coefficients pour augmenter l'efficacité de la recherche de l'extremum. La méthode de "recuit simulé" prend son nom du phénomène de refroidissement lent des métaux. Lors de ce refroidissement, les atomes s'organisent de façon à trouver le minimum d'énergie interne. Cette méthode demande de grandes ressources calculatoires difficilement conciliables avec la méthode des éléments finis.

La méthode de logique floue (*fuzzy logic*): la logique floue propose en entrée du programme de tenir compte de l'intervalle d'incertitude des paramètres. Pour cela, un ensemble de nouvelles opérations mathématiques a été défini en 1965 par Zadeh [84]. L'application de cette méthode aux éléments finis est très récente. Citons notamment S. Vallapian et T.D. Pham [80] (1993). La méthode de logique floue ne trouve pas encore d'application en dynamique, et de plus, elle fait certaines hypothèses sur les variables d'entrée qui sont très subjectives, donc très discutables (Watanabe [83] 1978 et Forsyth [23] 1983).

Ces trois méthodes sont peu appropriées à une implantation numérique modulaire avec les éléments finis, car elles demanderaient des quantités trop importantes de calculs même pour de petites structures et un faible nombre d'éléments.

On présente enfin la **technique de ré-analyse** de Kirsch et Toledano [46] (1983) et de Kirsch [45] (1991). Kirsch s'intéresse au problème statique. Il construit tout d'abord une base de solutions $[u_B] = [\{u_1\}, \{u_2\}, \dots, \{u_s\}]$ du problème suivant:

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (2.44)$$

Chacune des s solutions ($s \ll N$ nombre de degrés de liberté) provient de la résolution exacte de

l'équation (2.44) légèrement perturbée selon les variables d'entrée. Les solutions ultérieures $\{u_a\}$ sont ensuite approchées dans cette base:

$$\{u_a\} \simeq a_1\{u_1\} + a_2\{u_2\} + \dots + a_s\{u_s\} = [u_B]\{a\} \quad (2.45)$$

L'utilisation de cette expression dans l'équation (2.44) permet de calculer $\{a\}$ et de réduire ainsi la taille du système à résoudre pour chaque perturbation de $N \times N$ à $s \times s$. Kirsh donne une méthode pour construire la base de façon efficace (en utilisant la technique de changement d'échelle de la matrice $[K]$). Cette méthode est très intéressante car elle propose pour la première fois de donner des résultats corrects pour de larges intervalles d'incertitudes et un coût numérique assez réduit. La méthode demande cependant quelques modifications en dynamique. Elle reste toujours très lente par rapport à une méthode de perturbations simple (ordre un) mais elle est beaucoup plus précise.

2.7 Conclusion

Ce chapitre fait un état non exhaustif des méthodes utilisées pour prédire les variations d'une réponse mécanique en fonction des variations des paramètres d'entrée. La diversité des techniques est telle qu'il serait impossible, et même non souhaitable de décrire toutes les techniques de bases ou d'améliorations de la précision ou de la vitesse de calcul. Le lecteur curieux peut consulter l'ouvrage de synthèse de l'American Institute of Aeronautics and Astronautics [2] (1993) consacré aux méthodes d'optimisation. Le chapitre suivant établit les objectifs spécifiques du mémoire dans le contexte qui vient d'être exposé.

Chapitre 3

Objectifs de la recherche

Avec l'état des connaissances, il est maintenant possible de définir les objectifs généraux et les objectifs spécifiques de la recherche. Le mémoire s'intitule "formulation numérique de la sensibilité de la réponse vibratoire aux incertitudes physiques d'un modèle structural". La définition des objectifs doit permettre d'innover et d'apporter au G.A.U.S. (Groupe d'Acoustique de l'Université de Sherbrooke) un outil numérique souple d'emploi. En particulier:

- Le logiciel doit avoir une base modulaire, pour tirer profit d'un interfaçage avec les logiciels d'éléments finis du groupe d'acoustique, en particulier GAUSVEM ou NASTRAN. La stratégie de programmation fait autant partie du projet que les résultats.
- Le logiciel doit prédire une estimation de la réponse avec une faible erreur pour de grandes incertitudes des paramètres d'entrée (intervalles de variation totale représentant plus de 10% d'écart de part et d'autre de la moyenne). La plupart des logiciels existants ne peuvent donner de bons résultats pour de telles variations en un temps raisonnable.

Le cadre de la recherche est le suivant:

- Initialement, l'objectif était de prédire la puissance rayonnée maximale de la structure incertaine. Etant donnée la complexité des méthodes utilisées, il a été jugé prudent d'étudier une variable de réponse telle que l'énergie cinétique spécifique, et les valeurs propres et vecteurs propres de la structure. Les problèmes couplés demandent une étude très approfondie des éléments finis et éléments finis de frontière, qui dépasse largement le cadre de la maîtrise.

- Les grandeurs d'entrée sont données uniquement sous forme de bornes maximales et minimales. La variation des grandeurs est uniforme sur tout élément fini, et il n'existe pas de corrélation statistique entre les paramètres d'entrée de deux éléments côte à côte (pas de champ aléatoire, voir le chapitre 2, section 2.4.1). La réponse est donnée aussi dans ce format, mais elle peut être connue par sa moyenne et sa variance si la méthode numérique s'y prête mieux (méthode de perturbations, voir chapitre 2, section 2.5.1).

3.1 Objectif général

L'objectif général de la maîtrise est de déterminer s'il est possible de créer un logiciel d'éléments finis modulaire qui prédise efficacement les réponses extrémales d'une structure qui possède des propriétés incertaines de géométrie, de raideur, d'amortissement. Il ne s'agit pas d'une étude de sensibilité. La réponse étudiée est l'énergie cinétique des structures vibrantes car son expression est simple. Plus particulièrement, on étudie le rapport de l'énergie cinétique sur la masse de la structure. Ce rapport est appelé énergie cinétique spécifique.

3.2 Objectifs spécifiques

Les objectifs spécifiques précisent les étapes de la recherche qui permettent d'atteindre l'objectif général. Les étapes sont les suivantes:

1. Etudier l'implantation des méthodes existantes (Monté Carlo et méthodes de perturbations) pour déceler leurs limites et leurs avantages.
2. Mettre au point une nouvelle méthode pour tirer profit de l'expression de l'énergie cinétique spécifique dans la base modale.
3. Vérifier la validité des hypothèses de la nouvelle méthode (en particulier la possibilité d'approximer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une structure) et expliquer les points essentiels de la programmation.
4. Comparer les trois méthodes (Monté Carlo, perturbations et PMO) en vitesse de calcul et en précision pour divers assemblages de poutres.

Chapitre 4

Bases théoriques des méthodes de prédiction

4.1 Introduction

Objet du chapitre: dans ce chapitre, on présente une nouvelle méthode de prédiction de l'énergie cinétique spécifique maximale d'une structure quelconque modélisée par éléments finis. Deux autres méthodes fondamentales (Monté Carlo et perturbations) sont expliquées pour montrer les tenants, les aboutissants, et l'originalité de la nouvelle méthode. Les trois méthodes sont comparées en termes de vitesse et de précision au chapitre 5.

Conventions typographiques: dans ce chapitre, la méthode de Monté Carlo est désignée par l'acronyme MC, ce qui regroupe en fait plusieurs techniques. La méthode de perturbations a pour acronyme P1 pour une perturbation d'ordre 1 de chaque paramètre, et P2 pour une perturbation d'ordre 2. Enfin, l'algorithme proposé comme méthode originale dans le cadre de la maîtrise est dénommé PMO1, pour méthode de recherche de "Points Modaux Optimaux" d'ordre 1 et PMO2, pour méthode de recherche de "Points Modaux Optimaux" d'ordre 2. D'autres conventions typographiques sont adoptées:

- Un vecteur est symbolisé par une lettre entre accolades: $\{\Phi\}$, une matrice par une lettre majuscule entre crochets: $[K]$.
- Le conjugué d'un nombre complexe est indiqué par une étoile q^* . Dans la plupart des

équations, il est sous-entendu que les opérations sont valides aussi bien en nombres complexes qu'en nombres réels. Si ce n'est pas le cas, la mention spéciale est apportée directement dans le texte.

- Les matrices $[M]$ et $[K]$ désignent respectivement la masse et la raideur de la structure, et ω_k et $\{\Phi_k\}$ la fréquence propre et le vecteur propre du mode k . Par commodité, les vecteurs propres peuvent être regroupés par colonnes dans une matrice $[\Phi]$ (non nécessairement carrée).
- Les valeurs approchées sont distinguées des valeurs exactes par un chapeau: $\hat{\omega}_k$ est une approximation de ω_k , et $\{\hat{\Phi}_k\}$ est une approximation de $\{\Phi_k\}$.
- Les matrices projetées sur une base modale sont caractérisées par un tilde: $[\tilde{Z}]$ par exemple pour la matrice d'impédance modale d'une structure.

Hypothèses fondamentales: les hypothèses fondamentales à la compréhension de certaines simplifications dans le reste du texte sont les suivantes:

- Le régime d'oscillations de la structure est permanent, de sorte que des résolutions directes ou modales des équations du mouvement sont possibles. Le mémoire ne donne aucun détail sur l'étude stochastique des régimes transitoires.
- Pour une structure donnée, seul le domaine des basses fréquences est considéré. En effet, les méthodes de prédiction sont inadaptées aux grandes densités modales. La raison principale est la baisse de précision des diverses approximations utilisées, ou son pendant, à savoir l'augmentation du coût numérique à précision constante. D'autre part, les régimes de moyennes et hautes fréquences exigent des maillages par éléments finis très fins qui produisent des modèles incompatibles avec le matériel informatique actuellement disponible (1998).

Concernant la dernière hypothèse, la méthode SEA constitue une alternative prometteuse à la prédiction des réponses maximales dans le domaine des hautes fréquences. Toutefois, une analyse plus fine de la SEA et son application au problème sortent du cadre de l'exposé, cadre restreint aux éléments finis.

Organisation des sections: chaque section présente d'abord l'organigramme simplifié de la méthode, puis quelques détails d'implémentation. En dernier lieu, l'efficacité de la méthode

est discutée, et un ou deux articles ou livres fondamentaux sont donnés au lecteur pour un approfondissement.

4.2 Méthode de Monté Carlo

4.2.1 Organigramme

La figure (4.1) montre un organigramme simplifié de la méthode de Monté Carlo utilisée. On a fait l'hypothèse d'amortissement structural, ce qui signifie que l'amortissement peut être inclu dans la matrice de raideur qui devient complexe. Le calcul des vecteurs propres se fait dans l'ensemble des réels si l'amortissement est faible en utilisant la partie réelle de la raideur, ou dans l'ensemble des nombres complexes. On met l'accent sur le grand nombre de boucles à exécuter, chaque boucle comprenant la résolution d'un problème de vecteurs et valeurs propres. Dans l'organigramme, le symbole $\langle v^2 \rangle$ représente l'énergie cinétique spécifique (voir l'avertissement au lecteur, au début du rapport).

4.2.2 Théorie

Les méthodes de Monté Carlo ont toutes pour principe d'effectuer un grand nombre de simulations avec le même algorithme mais pour des valeurs d'entrée différentes. Les S résultats Y_1, Y_2, \dots, Y_S de l'algorithme sont analysés à l'aide d'*estimateurs* statistiques:

- Estimateur de la moyenne:

$$\bar{Y} = \frac{1}{S} \sum_{j=1}^S Y_j \quad (4.1)$$

- Estimateur non biaisé de la variance:

$$Var[Y] = s_Y^2 = \frac{1}{S-1} \sum_{j=1}^S (Y_j - \bar{Y})^2 \quad (4.2)$$

- Estimateur de biaisage (Skewness), rarement calculé:

$$Skew[Y] = \frac{1}{S} \sum_{j=1}^S \left(\frac{Y_j - \bar{Y}}{s_Y} \right)^3 \quad (4.3)$$

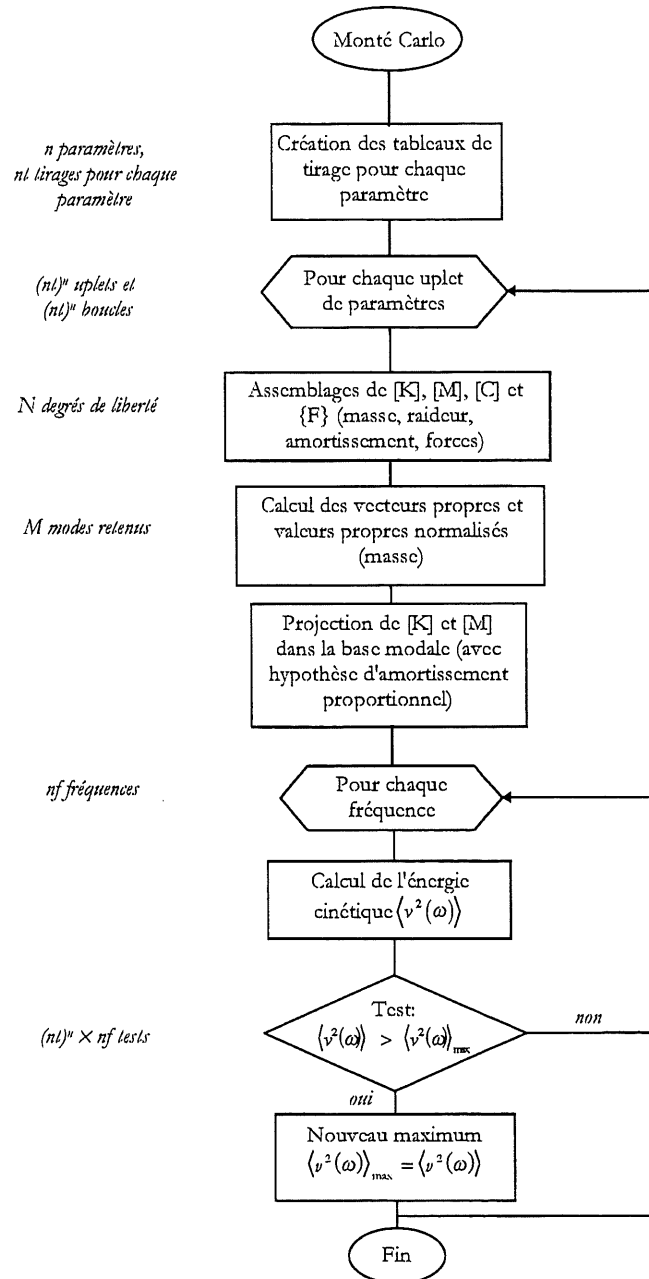


Figure 4.1: Organigramme simplifié de la méthode de Monté Carlo.

Les estimateurs de la moyenne et de la variance donnent une bonne approximation de la moyenne exacte $E[Y]$ et de la variance exacte $V[Y]$, obtenues en faisant tendre la taille de l'échantillon vers l'infini. La racine carrée de la variance est appelée l'écart type. L'estimateur de l'écart type est noté s_Y , tandis que l'écart type exact est noté σ_Y^2 .

Connaissant la moyenne et la variance de l'échantillon, on estime le maximum et le minimum d'après la règle de Tchebychev:

$$Y_{max} \simeq \bar{Y} + 3s_Y \quad (4.4)$$

$$Y_{min} \simeq \bar{Y} - 3s_Y \quad (4.5)$$

Cette règle est peu précise, et il faut éviter de l'utiliser. En effet, l'approche de Tchebychev donne souvent une approximation trop grande ou trop petite des extrêma parce qu'elle utilise seulement la moyenne et la variance des réponses, plutôt que d'utiliser toute l'information (moments d'ordres supérieurs). Quand c'est possible, il vaut mieux sélectionner directement le minimum et le maximum des Y_i dans l'échantillon. Cela permet souvent d'obtenir de meilleurs résultats.

4.2.3 Implémentation

La méthode de Monté Carlo est très robuste si les deux conditions suivantes sont respectées:

- Le générateur de nombres aléatoires est de bonne qualité: il est important de choisir un bon générateur de nombres aléatoires pour les très grands échantillons ($> 10^6$), sinon la méthode ne converge pas (périodes trop petites). Une très bonne synthèse sur le sujet est proposée par Press et al. [64], 1994. Dans ce mémoire, on utilise la fonction `rand()` de Matlab. Cette fonction a une période de 2^{1492} , ce qui est largement suffisant pour les applications.
- Le nombre de simulations est suffisant: à priori, le nombre de simulations requis pour faire converger les résultats vers le maximum réel ou le minimum réel n'est pas connu. Par conséquent, le nombre de simulations est toujours très élevé.

Il est tout de même possible d'estimer le nombre minimal d'essais si la réponse est assez bien connue (c'est un cercle vicieux!). La technique exposée maintenant est expliquée par Davis et al. [17]. Puisque \bar{Y} est la somme de S variables aléatoires Y_1, Y_2, \dots, Y_n , elle suit approximativement une loi normale centrée à l'origine et réduite, notée \mathcal{N} (voir la figure 4.2). Ce résultat est obtenu

par application du théorème "central limit". Soit a un coefficient arbitraire positif. La probabilité que la moyenne estimée \bar{Y} soit encadrée par $E[Y] - a\sqrt{\frac{V[Y]}{S}}$ et $E[Y] + a\sqrt{\frac{V[Y]}{S}}$ est égale à:

$$\mathcal{P}\left\{E[Y] - a\sqrt{\frac{V[Y]}{S}} \leq \bar{Y} \leq E[Y] + a\sqrt{\frac{V[Y]}{S}}\right\} = 2\mathcal{N}(a) - 1 \quad (4.6)$$

Comme on cherche à calculer le nombre S de tirages qui minimise l'erreur sur la moyenne *exacte*

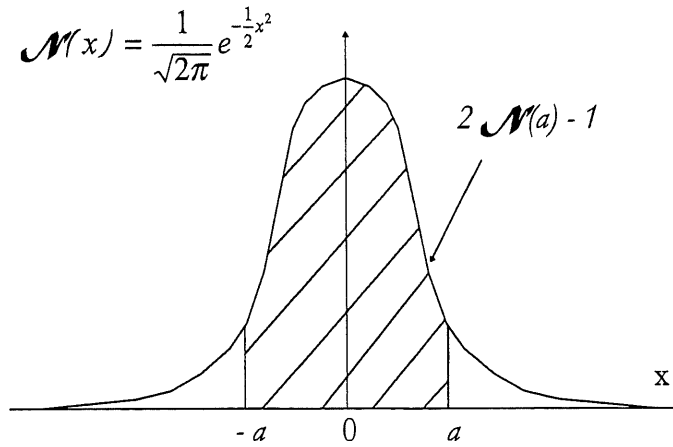


Figure 4.2: Loi normale centrée réduite \mathcal{N} .

$E[Y]$, on écrit l'équation (4.6) sous la forme:

$$\mathcal{P}\left\{\bar{Y} - a\sqrt{\frac{V[Y]}{S}} \leq E[Y] \leq \bar{Y} + a\sqrt{\frac{V[Y]}{S}}\right\} = 2\mathcal{N}(a) - 1 \quad (4.7)$$

Pour calculer S connaissant a (fixé par l'analyste, suivant la précision du résultat de la moyenne $E[Y]$), on pose:

$$\gamma = \frac{a}{E[Y]} \sqrt{\frac{V[Y]}{S}} \quad (4.8)$$

En utilisant l'inégalité de l'équation (4.7), on montre que:

$$S = \frac{a^2 V[Y]}{\gamma^2 E[Y]^2} = \frac{[\mathcal{N}^{-1}(\frac{1+\alpha}{2})]^2 V[Y]}{\gamma^2} \quad (4.9)$$

avec la définition suivante du niveau de confiance α :

$$\alpha = 2\mathcal{N}(a) - 1 \quad (4.10)$$

Le nombre S de simulations peut être calculé si le rapport de l'écart type sur la moyenne $\sigma_Y/E[Y]$, aussi appelé coefficient de variation, est connu approximativement. A titre d'exemple, pour être sûr à 95% que la moyenne d'un échantillon est sa moyenne réelle à 1% d'erreur près, le nombre minimal de tirages S est donné par:

$$S = \frac{[\mathcal{N}^{-1}(\frac{1+0.95}{2})]^2 V[Y]}{0.01} = 38.41 \left(\frac{\sigma_Y}{E[Y]} \right)^2 \quad (4.11)$$

Le coefficient de variation est imposé ou estimé par l'ingénieur d'après la connaissance du système, ou en tirant un petit échantillon. La formule est insatisfaisante, car elle demande une compétence que l'ingénieur n'a pas toujours. Dans ce projet, on a jugé plus sage de faire un nombre de simulations supérieur aux besoins réels *si c'est possible*, pour être sûr de la convergence de l'algorithme vers les maxima et minima.

Un autre procédé est utilisé dans ce mémoire pour faciliter sinon accélérer l'atteinte de la convergence: il s'agit de l'échantillonnage stratifié. Les intervalles des paramètres sont découpés en sous-intervalles à l'intérieur desquels un nombre réduit de tirages sont effectués. La méthode force les tirages à être également répartis sur l'intervalle de variation de chaque paramètre, alors qu'un simple tirage pseudo-aléatoire favorise toujours certaines régions de l'intervalle (en anglais, *clusters*). Des techniques plus complexes (espaces de Sobol's) permettent d'appliquer ce principe sans stratification et avec une plus grande efficacité (consulter la revue de Bratley, Fox et Shrage [10] 1983). Elles ne sont pas utilisées dans ce mémoire.

4.2.4 Compléments

La loi utilisée pour les tirages aléatoires est soit la loi de Gauss, soit une loi uniforme. Avec la loi uniforme, on est sûr que tout l'intervalle d'incertitude est balayé. Par contre, la loi est moins représentative des phénomènes réels (avec moyenne et variance). En pratique, le choix d'une loi de tirage est extrêmement important puisque l'application des même niveaux de confiance dans les formules pour deux lois différentes donne des résultats variant du simple au triple (ce qui est critique

lorsque ce sont des estimations de résistance à la rupture qui sont calculées). Cependant, ce choix n'est pas jugé essentiel dans le cadre de la maîtrise (il l'est par contre au niveau du concepteur).

4.3 Méthode de perturbation

4.3.1 Organigramme

La figure (4.3) montre un organigramme simplifié de la méthode de perturbations. On met l'accent sur le calcul de chaque dérivée des matrices de raideur, masse et des valeurs et vecteurs propres.

4.3.2 Rappels d'analyse modale et expression de l'énergie cinétique spécifique

La discrétisation des équations du mouvement d'une structure *in vacuo* est donnée par l'équation (4.12), où $[M]$ est la matrice de masse, $[K]$ la matrice de raideur, et $[C]$ la matrice d'amortissement. On suppose par la suite que la dimension de ces matrices est N (N degrés de liberté). Si la force d'excitation est harmonique de fréquence ω , le déplacement complexe (amplitude et phase) est étudié en régime permanent avec l'équation (4.13).

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (4.12)$$

$$(-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K])\{u\} = \{F\} \quad (4.13)$$

Dans ce chapitre, le modèle d'amortissement structural est utilisé. Ses propriétés sont telles que l'équation (4.13) peut s'écrire sous la forme (4.14). La matrice $[A(\eta)]$ symbolise l'effet spatial d'amortissement. Si l'amortissement est uniformément réparti sur la structure, on peut poser $[A(\eta)] = (1 + j\eta)[I]$, $[I]$ étant la matrice identité. Par la suite, on note indifféremment $[K]$ pour $[A][K]$, incluant ainsi l'amortissement dans la matrice de raideur qui devient complexe.

$$(-\omega^2[M] + [A(\eta)][K])\{u\} = \{F\} \quad (4.14)$$

On appelle impédance mécanique complexe force-déplacement de la structure la matrice $[Z]$ donnée par l'équation (4.15). Dans le reste du mémoire, on appelle "impédance" l'impédance

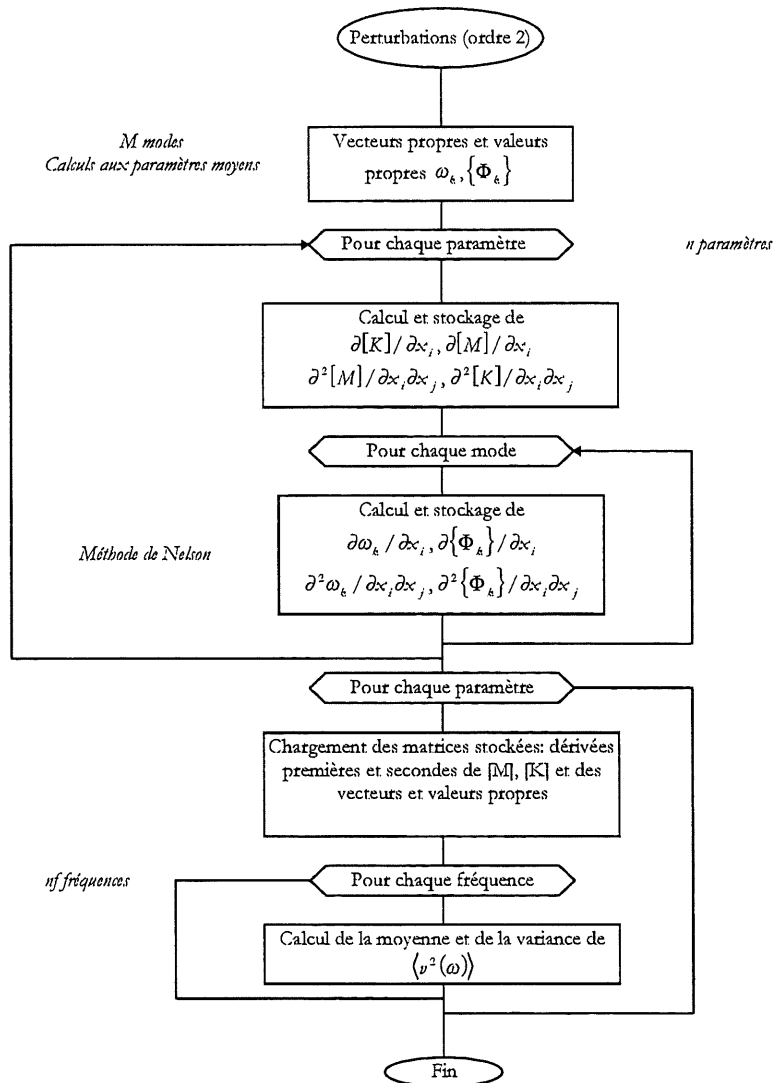


Figure 4.3: Organigramme simplifié de la méthode de perturbations d'ordre 2.

mécanique force-déplacement.

$$[Z] = -\omega^2[M] + [K] \quad (4.15)$$

Avec cette notation, le calcul de la réponse en déplacement est réduit à la résolution d'un problème statique complexe pour chaque fréquence. L'inversion de la matrice d'impédance pose toutefois de nombreux problèmes: grand nombre de degrés de liberté, conditionnement, matrice de nombres complexes. Pour diminuer la taille du système à résoudre, l'équation du mouvement est projetée sur la base des M premiers vecteurs propres de la structure, avec $M \ll N$. La base des vecteurs propres réels est souvent suffisante lorsque l'amortissement est faible, qu'il soit uniforme sur la structure ou non. L'équation modale du mouvement est donnée par l'équation (4.16). Sa solution est le vecteur $\{q\}$ des déplacements *modaux* liés aux déplacements *réels* $\{u\}$ par la transformation (4.17). La projection donne de nouvelles matrices plus petites ($M \times M$), donc plus rapides à inverser.

$$[\Phi]^T[Z][\Phi]\{q\} = [\Phi]^T\{F\} \quad (4.16)$$

$$\{u\} = [\Phi]\{q\} \quad (4.17)$$

Par la suite, on note l'impédance modale sous la forme (4.18). Avec ces notations, les déplacements modaux complexes $\{q\}$ de la structure sont solutions de l'équation (4.19), et les déplacements réels $\{u\}$ (amplitude et phase) sont déduits de l'équation (4.17).

$$[\tilde{Z}] = [\Phi]^T[Z][\Phi] \quad (4.18)$$

$$[\tilde{Z}]\{q\} = [\Phi]^T\{F\} \quad (4.19)$$

L'énergie cinétique spécifique de la structure est déduite de la connaissance des déplacements modaux et de la fréquence d'excitation ω de la structure. Dans la suite du mémoire, on utilise l'expression (4.20). Le symbole $\langle v^2 \rangle$ est utilisé pour représenter l'énergie spécifique (voir l'avertissement au lecteur).

$$\langle v^2(\omega) \rangle = \frac{\omega^2}{2m} \{q\}^T \cdot \{q\}^* \quad (4.20)$$

4.3.3 Equation perturbée de l'énergie cinétique spécifique

Conventions d'écriture: l'énergie cinétique spécifique dépend d'un grand nombre de paramètres d'entrée. La même grandeur (par exemple une section) peut être inconnue sur plusieurs endroits de la structure, et pour chacun des endroits il faut définir un nouveau paramètre inconnu (sauf mention contraire). Le $i^{\text{ème}}$ paramètre est représenté par une variable x_i , qui peut prendre n'importe quelle valeur entre son minimum $xmin_i$ et son maximum $xmax_i$. On appelle I_i l'intervalle d'incertitude du paramètre x_i .

$$I_i = [xmin_i; xmax_i] \quad (4.21)$$

Le nombre total des paramètres d'entrée est n . La représentation de l'énergie cinétique spécifique en fonction des paramètres demande un espace de dimension $n + 1$. On nomme Ω_{n+1} cet espace. La figure (4.4) montre les composantes de Ω_{n+1} . On définit le convexe C_n comme le produit topologique des intervalles d'incertitude:

$$C_n = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \quad (4.22)$$

La frontière de C_n , notée $\mathcal{F}(C_n)$, est la réunion des segments I_i (équation 4.23). Les extrémités de C_n sont les 2^n intersections des segments I_i . Sur la figure (4.4), les extrémités de C_n ($n = 2$) sont les 4 points A_1 , A_2 , A_3 , et A_4 .

$$\mathcal{F}(C_n) = \bigcup_{i=1}^n I_i \quad (4.23)$$

On définit aussi l'application \mathcal{D} qui associe à tout n -uplet de paramètres de l'ensemble C_n l'énergie cinétique spécifique $\langle v^2 \rangle$ sur l'ensemble V , sous-ensemble des nombres réels positifs:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D} & \\ C_n & \longrightarrow & V \\ M(x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto & \langle v^2(M, \omega) \rangle \end{array}$$

La représentation graphique de l'énergie sur C_n est notée Σ . En 3 dimensions, Σ est une portion de surface gauche (voir la figure 4.4). L'allure de la surface Σ dépend de la fréquence cyclique d'excitation ω .

Position et formulation du problème: trouver pour chaque fréquence ω le maximum (minimum) de l'énergie cinétique spécifique sur C_n en utilisant le moins de points de simulation

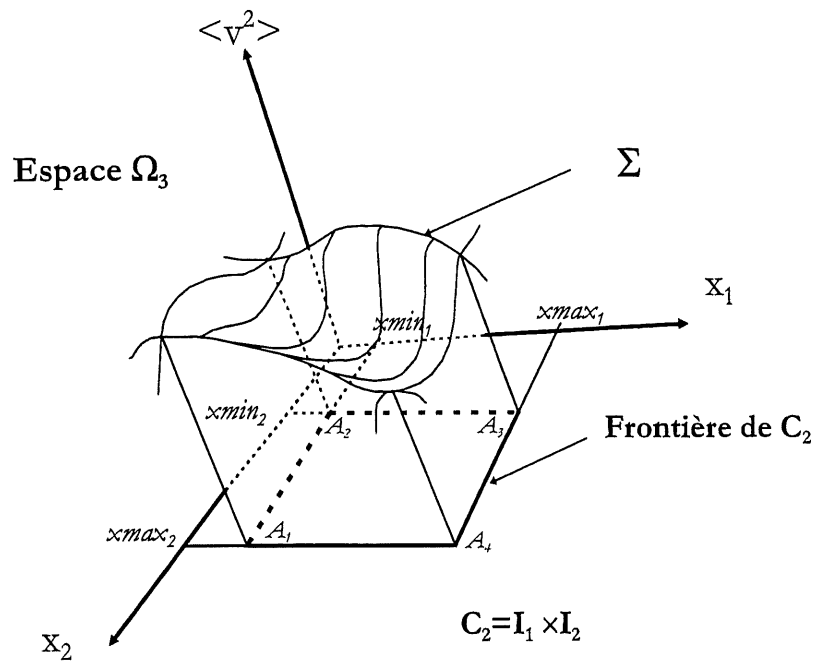


Figure 4.4: Représentation graphique de l'énergie cinétique spécifique et des sous-ensembles impliqués dans la définition de Σ .

possible. Pour atteindre cet objectif, on développe l'énergie cinétique spécifique en série de Taylor autour d'un point de C_n . Soit $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ ce point. Le développement en série permet d'écrire en tout autre point $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de C_n la relation suivante:

$$\begin{aligned} \langle v^2(M, \omega) \rangle = \langle v^2(M_0, \omega) \rangle &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \langle v^2(M_0, \omega) \rangle}{\partial x_i} \Delta x_i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0, \omega) \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j \\ &+ R(M, M_0, \omega) \end{aligned} \quad (4.24)$$

avec

$$\Delta x_i = (x_i - x_i^{(0)}) \quad (4.25)$$

$R(M, M_0, \omega)$ est le reste de la série. La théorie veut que maximum (minimum) de l'énergie cinétique spécifique corresponde au maximum (minimum) du développement en série *complet*. En pratique, il est difficile de calculer toutes les dérivées successives d'une fonction, de sorte que le développement est tronqué à l'ordre 1 ou 2. Par conséquent, le développement tronqué est une *approximation* de la fonction énergie cinétique spécifique réelle, et le maximum (minimum) calculé est aussi une évaluation plus ou moins rigoureuse du maximum exact. Le développement tronqué est appelé polynôme d'approximation dans la suite de l'exposé.

Il est inexact de calculer le maximum ou le minimum par simple annulation des dérivées du polynôme d'approximation, car la solution obtenue ne tient pas compte des contraintes imposées aux paramètres d'entrée. La solution peut donc se trouver hors du domaine d'étude C_n . La théorie offre deux possibilités pour chercher les extrêma d'une fonction sur un domaine délimité: les méthodes d'optimisation sous contrainte, et les méthodes statistiques. La technique de perturbations utilisée en éléments finis s'appuie sur les modèles statistiques qui *utilisent les propriétés des opérateurs moyenne et variance pour éliminer les contraintes*. Les calculs sont expliqués dans les deux sections suivantes.

4.3.4 Moyenne de l'énergie sur C_n

Pour faciliter la compréhension d'articles plus spécialisés, l'ordre 2 est conservé. Pour calculer la moyenne de l'énergie sur C_n , l'opérateur linéaire espérance mathématique est appliqué au polynôme

d'approximation, ce qui donne l'équation (4.26).

$$E[\langle v^2(M) \rangle] = \langle v^2(M_0) \rangle + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i} E[\Delta x_i] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_j} E[\Delta x_i \Delta x_j] \quad (4.26)$$

Dans cette expression $E[\Delta x_i]$ est défini par:

$$E[\Delta x_i] = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - x_i^{(0)}) f_i(x_i) dx_i \quad (4.27)$$

où f_i est la fonction densité de probabilité de la variable x_i . Cette fonction exprime la probabilité qu'un paramètre prenne une valeur particulière entre ses bornes minimale et maximale. Pour rester cohérent avec les contraintes imposées aux paramètres d'entrée, on suppose nulle la probabilité qu'ils dépassent leurs bornes: il est indifférent d'intégrer sur $[-\infty; \infty]$ ou sur $[(x_{min_i} - x_i^{(0)}); (x_{max_i} - x_i^{(0)})]$. Les choix suivants simplifient aussi les calculs:

- Le paramètre $x_i^{(0)}$ est la moyenne de x_i , notée \bar{x}_i .
- La densité de probabilité f_i est une fonction paire: $f_i(x_i) = f_i(-x_i)$.

Donc il vient:

$$E[\Delta x_i] = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \bar{x}_i) f_i(x_i) dx_i = \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_i(x_i) dx_i - \bar{x}_i = 0 \quad (4.28)$$

Le calcul de $E[\Delta x_i \Delta x_j]$ (ordre 2 du développement) fait intervenir la densité de probabilité couplée $f_{(i,j)}$ des variables x_i et x_j . Pour cette raison, on appelle covariance des variables le terme $E[\Delta x_i \Delta x_j]$, souvent remplacé par l'écriture plus suggestive $Cov[x_i, x_j]$. Finalement, l'équation perturbée de l'énergie est la somme du terme d'énergie calculé à la moyenne, et des covariances $E[\Delta x_i \Delta x_j]$ pondérées, comme il est montré à l'équation (4.29).

$$E[\langle v^2(M, \omega) \rangle] = \langle v^2(M_0, \omega) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0, \omega) \rangle}{\partial x_i \partial x_j} E[(\Delta x_i, \Delta x_j)] \quad (4.29)$$

4.3.5 Variance de l'énergie sur C_n

De façon analogue à la moyenne, l'opérateur de variance est appliqué à l'équation perturbée de l'énergie. L'opérateur *n'est pas linéaire*, la variance d'une somme n'étant pas la somme des variances.

Il en résulte une grande complexité des équations de la variance. Le lecteur trouvera les calculs complets en annexe A. Avec l'hypothèse que les paramètres d'entrée suivent une loi symétrique (i.e. non biaisée), les moments d'ordre 3 obtenus dans les équations s'annulent, et l'expression finale est simplifiée. Ci-dessous, on donne la définition de la variance de l'énergie cinétique spécifique à l'équation (4.30), et le résultat à l'équation (4.31) pour une loi de densité de probabilité symétrique.

$$V[\langle v^2(M) \rangle] = E \left[\{ \langle v^2(M) \rangle - E[\langle v^2(M) \rangle] \}^2 \right] \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} V[\langle v^2(M) \rangle] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_j} E[\Delta x_i \Delta x_j] \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_p} \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_j \partial x_q} E[\Delta x_i \Delta x_j] E[\Delta x_p \Delta x_q] \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_q} \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_j \partial x_p} E[\Delta x_i \Delta x_j] E[\Delta x_p \Delta x_q] \quad (4.31) \end{aligned}$$

4.3.6 Synthèse des expressions de la moyenne et de la variance

Les équations ci-dessus appellent deux remarques :

- Ce qui est vrai pour l'énergie cinétique spécifique est vrai pour toute autre variable développée en série de Taylor (fréquences propres, vecteurs propres). Les sections subséquentes en font un usage assez large.
- Le couplage statistique des paramètres d'entrée est souvent inconnu, et de peu d'intérêt pour des paramètres uniformément répartis. Par conséquent, les covariances $E[\Delta x_i \Delta x_j]$ et $E[\Delta x_p \Delta x_q]$ sont posées nulles pour $i \neq j$ et $p \neq q$. Pour des indices identiques $i = j$ et $p = q$, les covariances sont égales au carré des écarts types $\sigma_{x_i}^2$ et $\sigma_{x_p}^2$.

Dans le cadre de la maîtrise, l'hypothèse d'indépendance statistique des variables d'entrée est raisonnable. Par contre, cette donnée est importante pour la simulation de champs aléatoires (voir le chapitre 2): x_i pourrait être la valeur aléatoire h_i de l'épaisseur sur un élément i , et x_j la valeur aléatoire de l'épaisseur h_j sur un élément j juxtant i . A moins d'une variation d'épaisseur en bruit blanc sur la structure, la probabilité que $x_i = h_i$ n'est pas indépendante de la probabilité que

$x_j = h_j$ pour une simple raison de lien "matériel". On écrit les équations (4.30) et (4.31) avec l'hypothèse d'indépendance statistique:

$$E[\langle v^2(M, \omega) \rangle] = \langle v^2(M_0, \omega) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0, \omega) \rangle}{\partial x_i^2} \sigma_{x_i}^2 \quad (4.32)$$

$$V[\langle v^2(M) \rangle] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_p} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \sigma_{x_p}^2 \quad (4.33)$$

La moyenne et la variance sont utilisées pour connaître l'approximation du maximum et du minimum de l'énergie cinétique spécifique (ou une autre variable), à une fréquence donnée. La probabilité que le maximum (minimum) de l'énergie cinétique spécifique soit plus grand que la moyenne plus 3 fois l'écart type est de 10% environ (règle de Tchebychev). L'assertion de Tchebychev est beaucoup trop imprécise en général, car elle n'utilise que l'information des deux premiers moments (moyenne et variance) d'une loi. C'est pourtant le moyen le plus simple d'estimer le maximum par la méthode de perturbations.

Remarque importante: l'hypothèse d'indépendance statistique *n'exprime pas que les variables soient découplées analytiquement*, puisque la variance de l'énergie cinétique spécifique contient encore des dérivées secondes croisées. Malgré leur importance, le calcul des dérivées croisées est numériquement très coûteux pour un grand nombre de variables d'entrée, et il demande des stratégies de stockage inhabituelles (stockage des dérivées secondes croisées de matrices, etc...). Dans la pratique, on préfère souvent ne pas considérer le couplage analytique (voir Fleury [22] 1989). La variance est alors donnée par:

$$V[\langle v^2(M) \rangle] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i^2} \right)^2 \sigma_{x_i}^4 \quad (4.34)$$

4.3.7 Vue globale de l'implantation

Le programme donnant la moyenne et la variance de l'énergie cinétique spécifique exige de calculer ses dérivées premières et secondes. Le point de départ est l'expression de l'énergie cinétique spécifique donnée à l'équation (4.20). L'énergie cinétique spécifique symbolisée $\langle v^2 \rangle$ est le rapport de l'énergie cinétique sur la masse totale de la structure (voir l'avertissement au début du rapport).

La dérivation par rapport au paramètre x_i donne l'équation (4.35):

$$\frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial x_i} = \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{m} \{q\}^T \cdot \{q\}^* \right) \quad (4.35)$$

Cette équation est développée en tenant compte du fait que l'énergie cinétique spécifique $\langle v^2 \rangle$ a déjà été calculée:

$$\frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial x_i} = \frac{1}{m} \left\{ \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\{q\}^T \cdot \{q\}^*) - \frac{\partial m}{\partial x_i} \langle v^2 \rangle \right\} \quad (4.36)$$

La dérivée seconde croisée est écrite d'abord directement (équation (4.37), puis en tenant compte de l'expression déjà calculée de la dérivée première (équation 4.38). On pose $i = j$ si les variables sont analytiquement découplées.

$$\frac{\partial^2 \langle v^2 \rangle}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{m} \left(\frac{\omega^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\{q\}^T \cdot \{q\}^*) - \frac{\partial m}{\partial x_i} \langle v^2 \rangle \right) \right\} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \langle v^2 \rangle}{\partial x_i \partial x_j} = & - \frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial x_j} \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial x_i} \\ & + \frac{1}{m} \left\{ \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\{q\}^T \cdot \{q\}^*) - \frac{\partial^2 m}{\partial x_i \partial x_j} \langle v^2 \rangle - \frac{\partial m}{\partial x_i} \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial x_j} \right\} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Dans les équations (4.36) et (4.38), le développement des différentielles successives de $\{q\}^T \cdot \{q\}^*$ fait apparaître les dérivées des déplacements modaux. Elles sont calculées par dérivation de l'équation matricielle (4.19). Il vient pour la dérivée première:

$$[\tilde{Z}] \frac{\partial \{q\}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \{[\Phi]^T \{F\}\} - \frac{\partial [\tilde{Z}]}{\partial x_i} \{q\} \quad (4.39)$$

et pour la dérivée seconde:

$$[\tilde{Z}] \frac{\partial^2 \{q\}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \{[\Phi]^T \{F\}\} - \frac{\partial^2 [\tilde{Z}]}{\partial x_i \partial x_j} \{q\} - \frac{\partial [\tilde{Z}]}{\partial x_i} \frac{\partial \{q\}}{\partial x_j} - \frac{\partial [\tilde{Z}]}{\partial x_j} \frac{\partial \{q\}}{\partial x_i} \quad (4.40)$$

Ces formules ont un grand intérêt: d'une part les matrices sont déjà projetées dans la base modale, donc elles sont de petites dimensions, d'autre part la matrice $[\tilde{Z}]$ n'est inversée qu'une fois pour toutes les dérivées du déplacement modal (matrice diagonale et complexe le plus souvent). Par conséquent le temps d'exécution de la boucle de fréquence est comparable à celui d'un problème déterministe de dynamique. C'est un point fort de la méthode.

Considérant les équations (4.39) et (4.40), le lecteur constate qu'il faut ajouter une dernière pré-étape qui consiste à calculer les dérivées de l'impédance modale et de la participation dynamique. Par un développement analogue aux précédents, il apparaît en toute fin que les seules dérivées qu'il est impossible d'écrire d'une façon explicite ou facilement calculable sont celles des vecteurs propres. Dans ce travail, elles sont calculées hors de la boucle des fréquences par un algorithme spécifique développé par Nelson [59] en 1976.

4.3.8 Calcul des dérivées modales avec l'algorithme de Nelson

Principe de l'algorithme de Nelson: cette partie s'inspire de l'article de Cao et Mlejnek [13] déjà cité au chapitre 2. L'algorithme de Nelson est simple dans son principe: l'équation (4.41) du problème aux vecteurs et valeurs propres sert de base à la dérivation. La matrice $[Z_k]$ est la matrice d'impédance $[K] - \omega_k^2[M]$ (en posant $\omega = \omega_k$). La matrice de raideur peut être réelle ou complexe, puisque l'algorithme n'utilise pas cette propriété. Les vecteurs propres sont normalisés par rapport à la masse suivant l'équation (4.42).

$$[Z_k]\{\Phi_k\} = \{0\} \quad (4.41)$$

$$\{\Phi_i\}^T[M]\{\Phi_k\} = \delta_{ik} \quad (4.42)$$

où δ_{ik} est le symbole de Kronecker valant 1 si $i = k$ et 0 si $i \neq k$. La différenciation de l'équation (4.41) par rapport au paramètre x_i donne l'équation (4.43). Elle permet de calculer la dérivée première du vecteur propre selon une technique expliquée plus bas (méthode de Nelson).

$$[Z_k] \frac{\partial \{\Phi_k\}}{\partial x_i} = - \frac{\partial [Z_k]}{\partial x_i} \{\Phi_k\} \quad (4.43)$$

Dans la suite, on appelle $\{H\}$ le vecteur second membre de l'équation (4.43):

$$\{H\} = - \frac{\partial [Z_k]}{\partial x_i} \{\Phi_k\} \quad (4.44)$$

On obtient l'expression de la dérivée de la valeur propre ω_k^2 en multipliant à gauche l'équation (4.43) par $\{\Phi_k\}^T$ et en utilisant la normalisation des vecteurs (équation 4.42):

$$\frac{\partial \omega_k^2}{\partial x_i} = \{\Phi_k\}^T \left(\frac{\partial [K]}{\partial x_i} - \omega_k^2 \frac{\partial [M]}{\partial x_i} \right) \{\Phi_k\} \quad (4.45)$$

De façon analogue, on différencie l'équation (4.43) une seconde fois par rapport à x_j :

$$[Z_k] \frac{\partial^2 \{\Phi_k\}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 [Z_k]}{\partial x_i \partial x_j} \{\Phi_k\} - \frac{\partial [Z_k]}{\partial x_i} \frac{\partial \{\Phi_k\}}{\partial x_j} - \frac{\partial [Z_k]}{\partial x_j} \frac{\partial \{\Phi_k\}}{\partial x_i} \quad (4.46)$$

et on appelle $\{R\}$ le vecteur second membre de l'équation précédente:

$$\{R\} = \frac{\partial^2 [Z_k]}{\partial x_i \partial x_j} \{\Phi_k\} - \frac{\partial [Z_k]}{\partial x_i} \frac{\partial \{\Phi_k\}}{\partial x_j} - \frac{\partial [Z_k]}{\partial x_j} \frac{\partial \{\Phi_k\}}{\partial x_i} \quad (4.47)$$

La dérivée seconde de la valeur propre est obtenue par le même principe que la dérivée première:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega_k^2}{\partial x_i \partial x_j} &= 2\{\Phi_k\}^T \left(\frac{\partial [K]}{\partial x_i} - \omega_k^2 \frac{\partial [M]}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \{\Phi_k\}}{\partial x_j} \\ &+ \{\Phi_k\}^T \left(\frac{\partial^2 [K]}{\partial x_i \partial x_j} - \omega_k^2 \frac{\partial^2 [M]}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial \omega_k^2}{\partial x_j} \frac{\partial [M]}{\partial x_i} \right) \{\Phi_k\} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Dans ces expressions, la différenciation de la matrice d'impédance $[Z_k]$ est immédiate car les seules dérivations réellement effectuées sont celles des matrices de masse et de raideur:

$$\frac{\partial [Z_k]}{\partial x_i} = \frac{\partial [K]}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_k^2}{\partial x_i} [M] - \omega_k^2 \frac{\partial [M]}{\partial x_i} \quad (4.49)$$

et

$$\frac{\partial^2 [Z_k]}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 [K]}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \omega_k^2}{\partial x_i \partial x_j} [M] - \frac{\partial \omega_k^2}{\partial x_i} \frac{\partial [M]}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_k^2}{\partial x_j} \frac{\partial [M]}{\partial x_i} - \omega_k^2 \frac{\partial^2 [M]}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.50)$$

Le calcul des dérivées des vecteurs propres à partir des équations (4.43) et (4.46) est difficile car la matrice d'impédance est singulière. Nelson propose de les résoudre en posant:

$$\frac{\partial \{\Phi_k\}}{\partial x_i} = \{\Psi_k\} + g_k \{\Phi_k\} \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial^2 \{\Phi_k\}}{\partial x_i \partial x_j} = \{\Theta_k\} + h_k \{\Phi_k\} \quad (4.52)$$

Les vecteurs $\{\Psi_k\}$ et $\{\Theta_k\}$ sont les solutions particulières des équations (4.43) et (4.46), tandis que g_k et h_k sont des scalaires à déterminer. Les solutions particulières sont obtenues de la façon suivante (méthode de Nelson):

1. On cherche l'indice l de la composante la plus grande de $\{\Phi_k\}$ en valeur absolue.
2. On remplace la $l^{\text{ième}}$ ligne et la $l^{\text{ième}}$ colonne de la matrice d'impédance $[Z_k]$ par 0, et l'élément diagonal $Z_k(l, l)$ par 1. Cette opération a pour but de lever la singularité tout en maximisant le conditionnement de $[Z_k]$. La matrice obtenue est appelée $[\bar{Z}_k]$.

3. On remplace le $i^{\text{ème}}$ élément de $\{H\}$ par 0 (équation 4.44). On obtient $\{\bar{H}\}$.

4. On résoud le système: $[\bar{Z}_k]\{\Psi_k\} = \{\bar{H}\}$.

Pour le vecteur $\{\Theta_k\}$ on utilise une opération similaire, en remplaçant $\{H\}$ par $\{R\}$ dans l'algorithme précédent. Après avoir trouvé l'expression des vecteurs $\{\Psi_k\}$ et $\{\Theta_k\}$, les scalaires h_k et g_k sont calculés en remplaçant les équations (4.51) et (4.52) dans l'équation (4.42) différenciée une puis deux fois respectivement. On obtient:

$$g_k = -\{\Phi_k\}^T[M]\{\Psi_k\} - 0.5\{\Phi_k\}^T \frac{\partial[M]}{\partial x_i} \{\Phi_k\} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} h_k = & -\{\Phi_k\}^T[M]\{\Theta_k\} - \frac{\partial\{\Phi_k\}^T}{\partial x_i}[M] \frac{\partial\{\Phi_k\}}{\partial x_j} - \{\Phi_k\}^T \frac{\partial[M]}{\partial x_j} \frac{\partial\{\Phi_k\}}{\partial x_i} \\ & - \{\Phi_k\}^T \frac{\partial[M]}{\partial x_i} \frac{\partial\{\Phi_k\}}{\partial x_j} - 0.5\{\Phi_k\}^T \frac{\partial^2[M]}{\partial x_i \partial x_j} \{\Phi_k\} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Synthèse du calcul: en pratique, le calcul des dérivées des vecteurs propres et des valeurs propres se fait dans l'ordre suivant, pour chaque paramètre:

1. Calcul de la dérivée première des valeurs propres avec l'équation (4.45). La dérivée de la fréquence propre ω_k se déduit de la dérivée de ω_k^2 par la relation suivante:

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} = \frac{1}{2\omega_k} \frac{\partial \omega_k^2}{\partial x_i} \quad (4.55)$$

2. Calcul de la dérivée première des vecteurs propres avec l'équation (4.43) et la méthode de Nelson exposée ci-dessus.

3. Calcul de la dérivée seconde des valeurs propres avec l'équation (4.48). La dérivée seconde des fréquences propres est donnée par:

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2\omega_k} \frac{\partial^2 \omega_k^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{2\omega_k^2} \frac{\partial \omega_k^2}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_k^2}{\partial x_j} \quad (4.56)$$

4. Calcul de la dérivée seconde des vecteurs propres avec l'équation (4.46) et la méthode de Nelson.

La méthode de Nelson conserve le caractère bande des matrices (impédance) ce qui permet d'optimiser les stockages des dérivées et d'accélérer les calculs subséquents. Par contre, l'inversion

de $[\bar{Z}_k]$ est obligatoire pour tous les modes et tous les paramètres. Le coût numérique est donc sensible pour les gros modèles. En revanche, la précision de la méthode est inégalée. L'article de Sutter et al. [77] (1988) établit un très bon comparatif des temps CPU de chaque étape pour plusieurs méthodes, dont: la méthode de Nelson, la méthode modale et modale modifiée, et la méthode des différences finies. Les comparaisons portent sur trois modèles éléments finis: une poutre cantilever avec épaisseur incertaine, une poutre cantilever avec masse concentrée incertaine, et un cylindre raidi avec 9 paramètres incertains (propriétés de section des raidisseurs, épaisseur des membranes, etc...). A titre de comparaison, voici les valeurs relatives de temps CPU (Nelson = 1) qu'on peut attendre lorsque qu'on arrête l'algorithme dès que la dérivée première des vecteurs propres par rapport à la masse est obtenue, pour le modèle du cylindre raidi:

Méthode	Temps relatifs
Nelson	1
Différences finies	1.13
Méthode modale	4.95
Modale modifiée	4.79

Tableau 4.1: Comparatif des temps CPU de diverses méthodes de dérivation des vecteurs et valeurs propres (cylindre raidi).

Enfin, la méthode présente aussi un intérêt calculatoire: on remarque que l'expression des différentielles des valeurs propres et des vecteurs propres dépend de différentielles d'ordres inférieurs. Par conséquent, en calculant un problème de perturbations à l'ordre deux, on a aussi accès aux différentielles d'ordre trois sans calculs techniques (si ce n'est qu'il reste à écrire les expressions analytiques).

4.3.9 Compléments sur la méthode de perturbations

L'algorithme de perturbations est efficace en temps de calcul pour des incertitudes assez faibles. Cependant, il faut souligner deux points faibles:

- Il faut stocker l'ensemble des dérivées premières et secondes des vecteurs propres, des valeurs propres, et des matrices de masse et de raideur complexe, ce qui exige une très grande réserve de disque pour un grand problème d'éléments finis.

- Les perturbations sur les entrées étant nécessairement très faibles, elles apportent en réalité assez peu d'information sur les extréma de la sortie (c'est-à-dire que les extréma diffèrent assez peu de la réponse d'origine).

Pour palier à ces inconvénients, l'auteur du mémoire s'est penché sur deux techniques hybrides avant de chercher une autre voie (section 4.4). La première technique couple la méthode de perturbations avec la méthode de Monté Carlo. La méthode de Monté Carlo est seulement appliquée aux variables d'entrée qui ont un intervalle d'incertitude très grand (dans un sens non précisé ici). Soit x_1 une variable traitée avec Monté Carlo et x_2 une variable traitée par perturbations. Pour chaque tirage aléatoire i de x_1 , noté $x_1^{(i)}$, la réponse $\langle v^2(x_1^{(i)}, x_2) \rangle$ est développée en série de Taylor autour de $x_2^{(0)}$:

$$\langle v^2(x_1^{(i)}, x_2) \rangle = \langle v^2(x_1^{(i)}, x_2^{(0)}) \rangle + \frac{\partial \langle v^2(x_1^{(i)}, x_2^{(0)}) \rangle}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \langle v^2(x_1^{(i)}, x_2^{(0)}) \rangle}{\partial x_2^2} \Delta x_2^2 \quad (4.57)$$

Soit nt le nombre total de tirages pour x_1 . La moyenne et la variance de la réponse sont données par les équations (4.58) et (4.59), expliquées dans l'annexe B. On a fait l'hypothèse du même nombre de tirages pour chaque variable traitée avec la méthode de Monté Carlo, pour simplifier les calculs. On a noté $\langle v^2(x_1^{(i)}, x_2) \rangle$ sous la forme plus condensée $\langle v^2 \rangle_i$.

$$E [\langle v^2 \rangle] \simeq \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^{nt} E [\langle v^2 \rangle_i] \quad (4.58)$$

$$V [\langle v^2 \rangle] \simeq \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^{nt} V [\langle v^2 \rangle_i] + \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^{nt} \left\{ E [\langle v^2 \rangle_i] \right\}^2 - \left\{ E [\langle v^2 \rangle] \right\}^2 \quad (4.59)$$

La deuxième méthode utilise les perturbations "par morceaux": l'espace de variation des variables d'entrée est partitionné en sous-intervalles de largeurs égales, et la méthode de perturbations est appliquée sur chaque sous-intervalle. Le point d'origine des développements en série n'est plus la moyenne de chaque variable mais le centre de chaque sous-intervalle (voir la figure 4.5). Par conséquent, il n'est plus possible de tenir compte de la symétrie de la loi de probabilité autour de ces points (sauf pour une loi uniforme). Il faut donc envisager un calcul numérique des intégrales donnant la moyenne et la variance de la réponse. L'auteur n'a pas développé ce point.

Les deux méthodes s'avèrent peu avantageuses pour deux raisons:

- Comment choisir les variables traitées par Monté Carlo dans la première méthode? (i.e. quel critère utiliser pour définir la quantité d'incertitude minimale pour que cette variable soit simulée avec Monté Carlo).
- Comment implanter simplement la seconde méthode (stockages), et combien de divisions doit-on utiliser pour obtenir un compromis temps / précision acceptable?

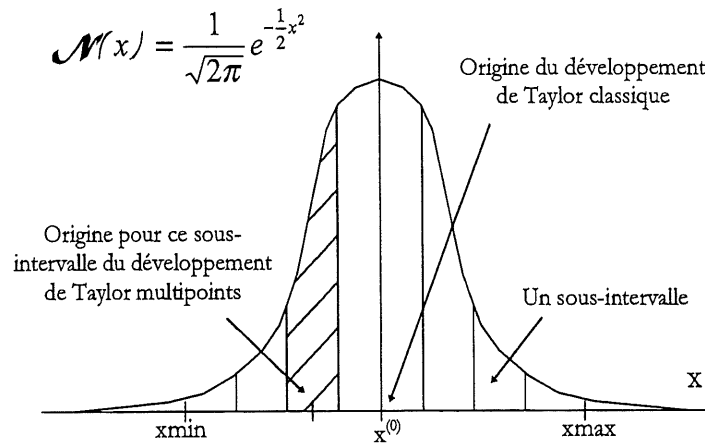


Figure 4.5: Méthode de perturbations multipoints pour une variable d'entrée: visualisation des sous-intervalles et de la loi supposée suivie par le paramètre d'entrée sur l'intervalle *complet*.

Pour répondre à la demande d'un outil plus puissant et plus simple, une nouvelle méthode est maintenant proposée.

4.4 Méthode modale de recherche de paramètres optimaux

4.4.1 Organigramme

La figure (4.6) montre un organigramme simplifié de la méthode de recherche de points modaux optimaux. L'accent est porté sur l'approximation polynômiale des vecteurs propres et des valeurs propres.

4.4.2 Présentation du problème

Pour pouvoir calculer le maximum ou le minimum de la réponse pour chaque fréquence avec précision sur le domaine C_n (voir page 46), il faut découpler les approximations faites à tous les niveaux du programme et le calcul de la réponse (énergie cinétique spécifique). L'objectif n'est pas atteint avec un développement de Taylor, même pour des variations d'entrée faibles (sections précédentes, et chapitre 5). La méthode idéale cherche directement les extrêma de la réponse dans l'espace des paramètres, plutôt qu'essayer d'approximer l'ensemble de l'énergie cinétique spécifique sur le domaine C_n . Malheureusement, il n'existe pas d'algorithme efficace donnant rapidement les extrêma d'une fonction très irrégulière. Par conséquent, une autre stratégie de recherche des extrêma doit être élaborée.

Dans les sections suivantes, on montre cette stratégie. On a mis l'accent sur le maximum de l'énergie cinétique spécifique. Toutes les explications sont néanmoins valides pour le minimum avec des modifications mineures.

4.4.3 Localisation des maxima

Pour montrer comment localiser les maxima de l'énergie cinétique spécifique dans l'espace des paramètres, son expression est écrite pour un amortissement uniforme sur la structure. Les équations (4.60) et (4.61) montrent que l'énergie cinétique spécifique dépend seulement de la masse m , des participations dynamiques au carré Γ_k^2 et des fréquences propres cycliques ω_k via le terme de coïncidence fréquentielle $(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_k^4$. Ces termes, m , Γ_k et ω_k , sont des fonctions implicites des paramètres.

$$\langle v^2(\omega) \rangle = \frac{\omega^2}{2m} \sum_{k=1}^{k=M} \frac{\Gamma_k^2}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_k^4} \quad (4.60)$$

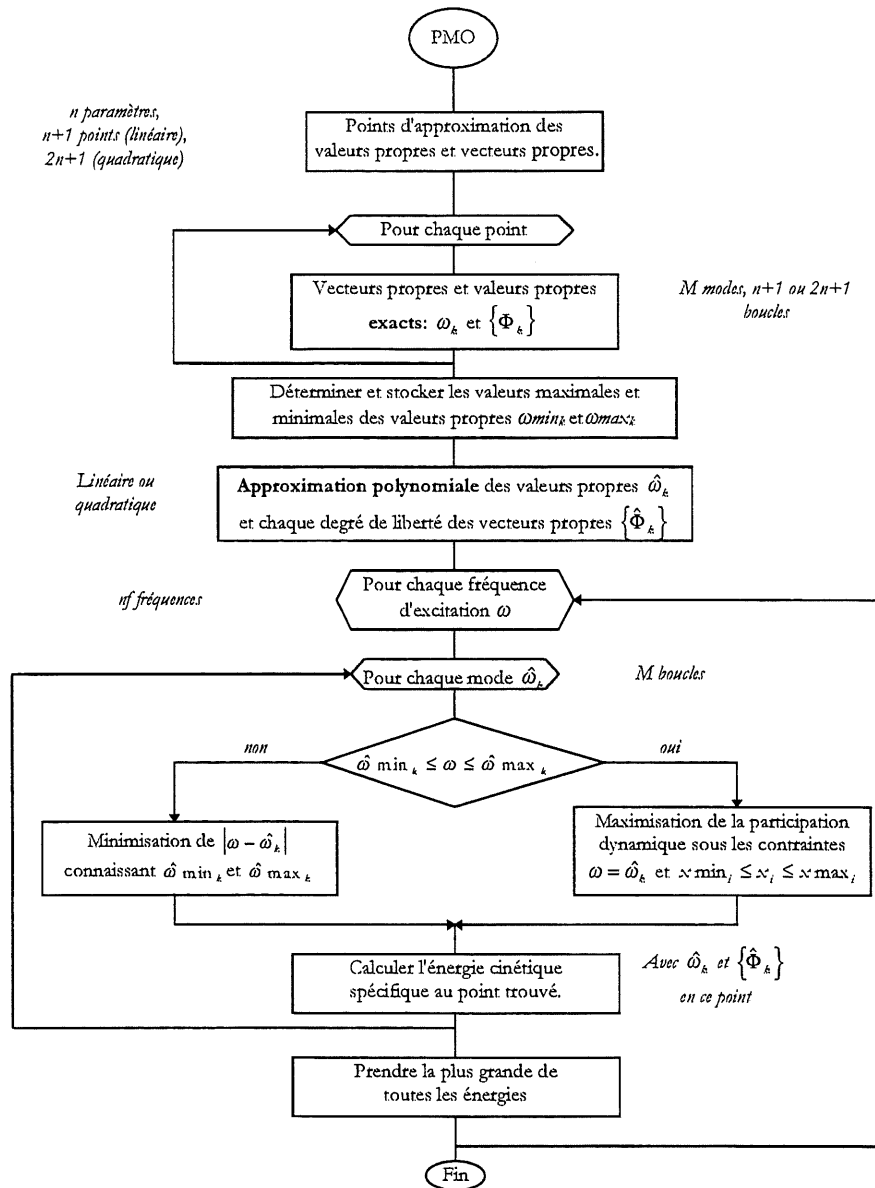


Figure 4.6: Organigramme simplifié de la méthode de recherche de points modaux optimaux (PMO).

$$\{\Phi_k\}^T \{F\} = \Gamma_k \quad (4.61)$$

Pour simplifier les explications, on suppose qu'une seule variable d'entrée x_1 est incertaine, qu'un seul mode ω_k suffit à calculer l'énergie cinétique spécifique, et que la fréquence d'excitation ω est donnée. L'intervalle d'incertitude de x_1 est noté I_1 , conformément aux notations de la section (4.3.3). Deux représentations duales de l'énergie sont possibles:

- L'énergie cinétique spécifique est tracée en fonction de la fréquence, *pour une valeur donnée de x_1* . Dans cette représentation, l'énergie atteint ses maxima aux résonances, c'est-à-dire quand la fréquence d'excitation est égale à l'une des fréquences propres, et ses minima lorsque l'écart de la fréquence d'excitation et des fréquences adjacentes est maximal.
- L'énergie cinétique spécifique est tracée en fonction de x_1 , *pour une valeur donnée de la fréquence*. Dans cette représentation, on montre que l'énergie atteint son maximum lorsque la valeur de x_1 minimise le dénominateur de l'énergie cinétique spécifique $m \times \left\{ (\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_k^4 \right\}$, tout en **maximisant la participation dynamique Γ_k^2** . On observe également que la coïncidence fréquentielle joue généralement un rôle plus important que la participation dynamique et la masse dans la sélection du maximum.

En variant virtuellement x_1 dans son intervalle d'incertitude, la fréquence propre ω_k , la masse et la participation dynamique de la structure varient (à condition que ω_k , m et Γ_k soient des fonctions de x_1). Par conséquent, il existe toujours une valeur x_1 dans I_1 qui minimise le dénominateur en favorisant le rapprochement de ω_k et de ω , tout en maximisant la participation dynamique. Or, la participation dynamique et la masse varient d'une façon continue en fonction des paramètres, dans l'hypothèse d'une force donnée, alors que la coïncidence fréquentielle est très irrégulière au voisinage des résonances. Cela justifie la moindre importance accordée à la participation dynamique et à la masse dans le processus de sélection du maximum. La stratégie mise au point en tient compte pour lever les difficultés calculatoires.

4.4.4 Formulation du problème pour plusieurs variables et plusieurs modes

La section précédente a montré que la recherche du maximum de l'énergie cinétique spécifique doit maximiser la participation dynamique tout en minimisant le produit masse \times coïncidence

fréquentielle d'un mode donné. La synthèse modale de l'énergie cinétique spécifique exige que cette opération (maximisation de la participation dynamique, minimisation du dénominateur) soit répétée pour chaque mode. Pour chaque mode et n paramètres, on formule le problème d'optimisation suivant:

Maximiser:

$$|\Gamma_k| \quad (4.62)$$

sous les contraintes paramétriques:

$$x_{min_1} \leq x_1 \leq x_{max_1} \quad (4.63)$$

...

$$x_{min_n} \leq x_n \leq x_{max_n} \quad (4.64)$$

et sous la contrainte fréquentielle:

$$m \times \left\{ (\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_k^4 \right\} \text{ minimale} \quad (4.65)$$

Le résultat de l'optimisation est l'ensemble \mathcal{E}_k des paramètres qui répondent au problème d'optimisation du mode k . Le point de Σ correspondant à l'ensemble \mathcal{E}_k est noté O_k . On obtient M points de ce type après avoir résolu l'optimisation pour les M modes. L'énergie cinétique spécifique est calculée pour chaque ensemble \mathcal{E}_k . Parmi les M valeurs obtenues, la plus grande correspond à l'énergie cinétique spécifique maximale.

La contrainte établie par l'équation (4.65) est trop complexe pour permettre une résolution directe. Pour simplifier le problème, il faut transformer cette contrainte en égalité. On suppose que la masse influence peu la position du point O_k dans l'espace des paramètres. Cette hypothèse justifiée par les simulations permet de simplifier la transformation. Deux cas peuvent se produire suivant le mode k considéré:

- Cas 1: la coïncidence fréquentielle atteint un minimum qui correspond au croisement de la fréquence d'excitation avec la fréquence ω_k , c'est-à-dire:

$$\omega = \omega_k \quad (4.66)$$

ou si l'on tient compte de l'amortissement uniforme η :

$$\omega = \omega_k \sqrt{1 + \eta^2} \quad (4.67)$$

Ce résultat s'obtient par annulation de la différentielle de $(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_k^4$ par rapport à ω_k^2 . On remplace ensuite la contrainte fréquentielle (4.65) par l'une des égalités précédentes: (4.66) ou (4.67). On obtient alors un problème d'optimisation classique.

- Cas 2: dans le domaine C_n le croisement des fréquences ω et ω_k n'est pas possible. La contrainte (4.65) reste sous cette forme. On obtient un problème d'optimisations multiples dont la résolution est extrêmement difficile.

Le deuxième point est tout de même résolu de la façon suivante: on suppose que la participation dynamique n'influence pas ou peu les paramètres solutions, hypothèse dont la validité est observée *à posteriori* sur les simulations effectuées (voir le chapitre 5). On maximise donc l'énergie cinétique spécifique en considérant uniquement la coïncidence fréquentielle. Le minimum de la coïncidence fréquentielle sur l'espace C_n correspond à la combinaison des paramètres qui minimisent la distance entre la fréquence d'excitation et la fréquence propre d'ordre k (figure 4.7).

La méthode exposée laisse un certain nombre de points dans l'ombre:

- Peut-on faire abstraction de la masse dans l'optimisation (cas 1) et (cas 2)?
- Comment résoudre le problème d'optimisation (cas 1)?
- Comment trouver le minimum de la coïncidence fréquentielle sur C_n (cas 2)?

Concernant la masse, un calcul simple montre que l'optimisation est plus difficile si on en tient compte. En particulier, la contrainte fréquentielle dans le cas 1 n'est pas une égalité de fréquences mais un système non linéaire. En posant:

$$f_k = m \times \left\{ (\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_k^4 \right\} \quad (4.68)$$

les nouvelles contraintes du cas 1 sont:

$$\frac{\partial f_k}{\partial \omega_k^2} \frac{\partial \omega_k^2}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial x_i} = 0 \quad \forall x_i \quad (4.69)$$

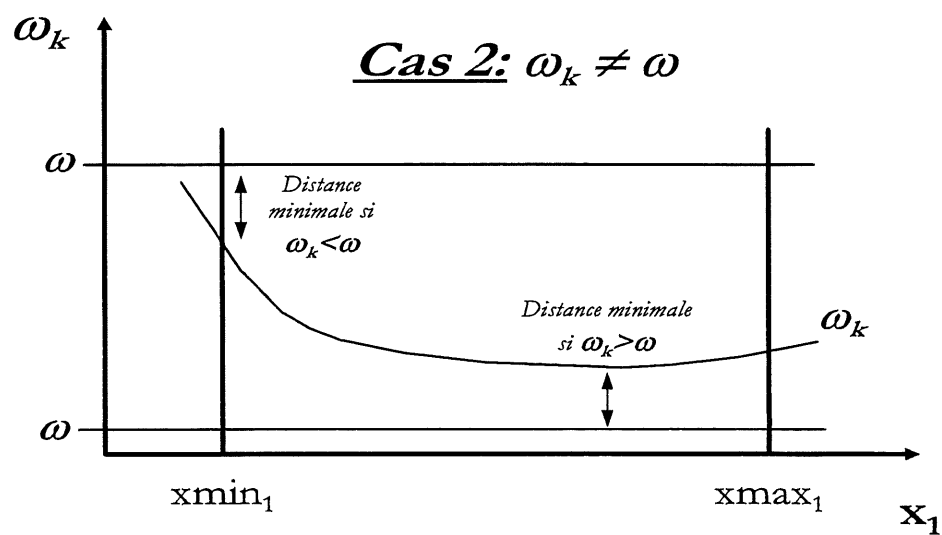
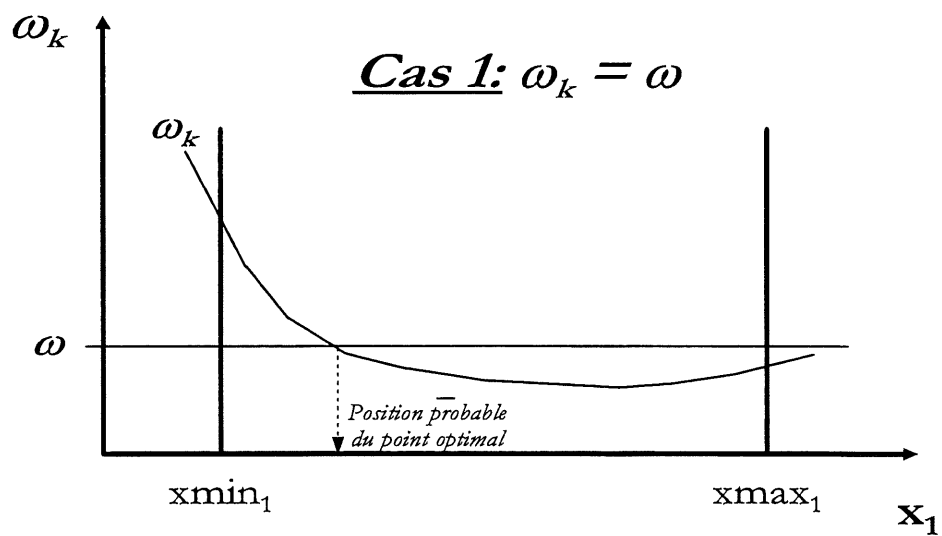


Figure 4.7: Fréquence propre tracée en fonction du paramètre x_1 : mise en évidence des 2 cas de l'algorithme d'optimisation.

Pour cette raison, la prise en compte de la masse dans les équations est laissée à un travail ultérieur (une piste de recherche est proposée dans le chapitre de conclusion page 126). On est conscient que cette hypothèse peut rendre caduques certaines prédictions. La réponse aux autres questions réside dans une propriété particulièrement intéressante des vecteurs propres et des valeurs propres. Cette propriété et son application sont expliquées dans la section suivante.

4.4.5 Propriété des modes et application

Propriétés: cette section montre que les vecteurs propres et les valeurs propres sont des fonctions des paramètres d'entrée dont les propriétés sont particulièrement intéressantes. Ces propriétés sont les suivantes:

- Propriété 1: les fonctions sont continues sur C_n .
- Propriété 2: les fonctions ont un comportement quasi linéaire sur de petits intervalles d'incertitudes, et quasi quadratiques sur des intervalles plus grands.

Applications: les propriétés permettent l'approximation linéaire ou quadratique de chacun des degrés de liberté des valeurs propres ainsi que l'approximation linéaire des valeurs propres sur C_n . Dans le contexte du projet, l'approximation a trois applications:

- Application 1: les vecteurs et les valeurs propres approchés sont calculés beaucoup plus rapidement que les vecteurs propres et les valeurs propres exacts, avec une erreur faible (qui dépend de l'incertitude des paramètres d'entrée).
- Application 2: le cas 1 page 61 est résolu par programmation linéaire si l'approximation est linéaire ou par une méthode itérative si l'approximation est d'ordre supérieur à 1 (méthodes SLP ou SQP). Des sous-routines basées sur l'algorithme de Dantzig existent déjà, et l'effort d'implantation est minime.
- Application 3: le cas 2 de la page 61 tel qu'il est simplifié correspond au problème d'optimisation suivant

Minimiser:

$$|\omega_k - \omega| \tag{4.70}$$

sous les contraintes paramétriques:

$$x_{min_1} \leq x_1 \leq x_{max_1} \quad (4.71)$$

...

$$x_{min_n} \leq x_n \leq x_{max_n} \quad (4.72)$$

Ce problème peut être résolu d'une façon analogue au cas 1, c'est-à-dire avec un algorithme de programmation linéaire ou une méthode itérative. Le point de C_n que l'on obtient est unique. Si l'approximation est linéaire, la solution de l'optimisation est l'un des 2^n sommets de C_n (A_1 à A_4 sur la figure 4.4).

D'autre part, la faible variation de la participation dynamique sur C_n permet de justifier quelque peu la simplification du problème posé au cas 2 de la section (4.4.4). Cette hypothèse à quelques limites, en particulier elle ne permet pas de prédire très précisément le maximum de la réponse *entre les résonances*. Ce point est discuté au chapitre suivant.

Compléments sur les propriétés des modes: il est très difficile de démontrer les propriétés 1 et 2 de la page 65 dans le cas général. Toutefois, Pritchard et Adelman [65] ont montré analytiquement qu'elles sont valides pour des paramètres qui interviennent linéairement dans les matrices de raideur (module d'Young...) et de masse d'un problème particulier. La démonstration est beaucoup plus simple pour les valeurs propres que pour les vecteurs propres. Pritchard et Adelman considèrent aussi un seul paramètre d'entrée x_1 pour simplifier (la notation différentielle est conservée dans ce mémoire). Ils partent de l'expression suivante:

$$\frac{\partial \omega_k^2}{\partial x_1} = \{\Phi_k\}^T \left(\frac{\partial [K]}{\partial x_1} - \omega_k^2 \frac{\partial [M]}{\partial x_1} \right) \{\Phi_k\} \quad (4.73)$$

Comme les coefficients de $[K]$ et $[M]$ sont au plus des fonctions linéaires de x_1 , leur dérivée partielle est soit nulle soit constante. La fréquence propre ω_k est donc solution d'une équation aux dérivées partielles linéaire (4.74). Les termes a_1 et b_1 sont les projections des matrices dérivées de la matrice de masse et de la matrice de raideur.

$$\frac{\partial \omega_k^2}{\partial x_1} = a_1 - b_1 \omega_k^2 \quad (4.74)$$

La solution de (4.74) autour de $x_1^{(0)}$ est donnée par:

$$\omega_k^2 = Ce^{-b_1(x_1 - x_1^{(0)})} + \frac{a_1}{b_1} \quad (4.75)$$

Pour la variable considérée, la variation de ω_k^2 selon l'axe x_1 est une exponentielle négative ou positive. La figure (4.8) montre plusieurs exponentielles pour des coefficients b_1 différents. L'approximation linéaire de la valeur propre est valide sur un intervalle d'incertitude d'autant plus large que b_1 est petit en valeur absolue. Des conclusions similaires s'appliquent aux vecteurs propres autour du point $x_1^{(0)}$.

4.4.6 Synthèse et conclusion

En synthèse, on rappelle le point central de la méthode PMO. Pour chaque mode:

- Si la fréquence de résonance ne croise pas la fréquence d'excitation, on minimise la coïncidence fréquentielle.
- Sinon, on résout le problème d'optimisation suivant:

Maximiser:

$$|\Gamma_k| \quad (4.76)$$

sous les contraintes paramétriques:

$$x_{min_1} \leq x_1 \leq x_{max_1} \quad (4.77)$$

...

$$x_{min_n} \leq x_n \leq x_{max_n} \quad (4.78)$$

et sous la contrainte fréquentielle:

$$\omega = \omega_k \sqrt{1 + \eta^2} \quad (4.79)$$

La présentation de la méthode proposée (PMO) n'est pas exhaustive. D'autres points seront développés au chapitre des résultats (tout ce qui concerne les détails d'implémentation). La méthode

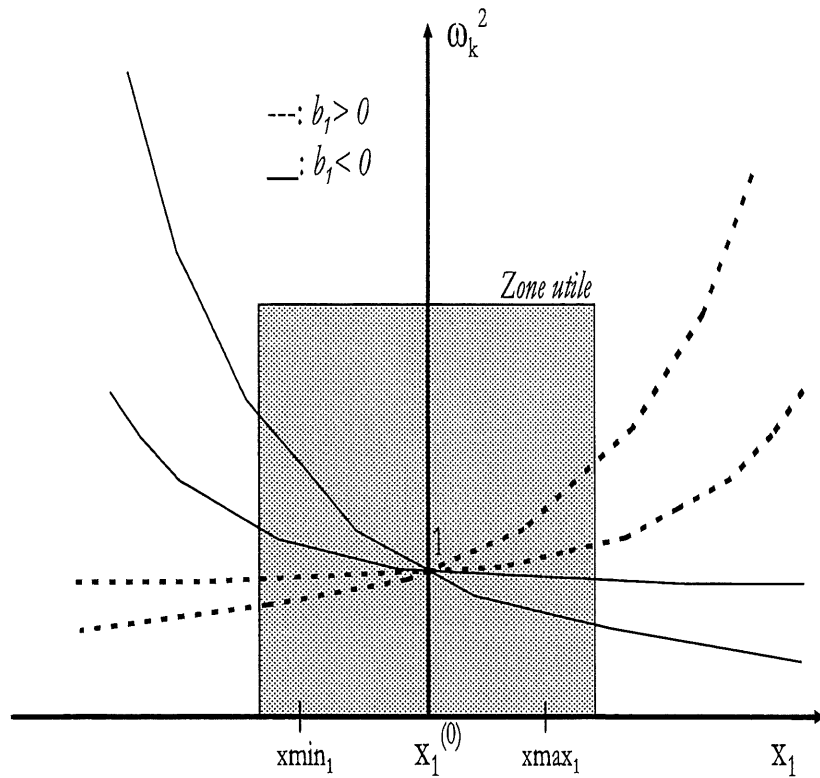


Figure 4.8: Exponentielle $e^{-b_1(x_1 - x_1^{(0)})}$ pour différentes valeurs de b_1 .

PMO est précise pour de larges intervalles d'incertitudes. Elle surpasse la méthode de perturbations, dont le défaut est d'appliquer l'approximation sur la variable de réponse finale (énergie cinétique spécifique) alors que son comportement est fortement non linéaire. La méthode PMO est rapide, mais probablement moins que la méthode de perturbations. Cette remarque laisse penser qu'il est possible de profiter des avantages des deux méthodes (rapidité et précision) sur tout l'intervalle

fréquentiel d'excitation: on peut réserver des zones de faibles variations de la réponse à un traitement par perturbations, et les zones de fortes variations (typiquement les résonances et leur voisinage) à un traitement par la méthode PMO. Le chapitre suivant montre les résultats obtenus avec la méthode PMO.

Chapitre 5

Méthodologie et résultats

5.1 Introduction

Ce chapitre présente les résultats comparés des méthodes. On adopte les mêmes conventions d'écriture qu'au chapitre 4 (page 46). Dans la section (5.2), on rappelle la méthodologie et le cadre du travail. Dans la section (5.3), on étudie spécifiquement l'approximation des vecteurs propres et des valeurs propres dans la méthode PMO, car l'approximation constitue le cœur de l'algorithme. Enfin, dans la section (5.4), on étudie le calcul de l'énergie cinétique spécifique maximale (voir l'avertissement au lecteur au début du mémoire), en précision et en rapidité. On met en évidence les difficultés particulières que pose l'implantation. On donne aussi les solutions apportées en cours de programmation, ou les solutions possibles mais non évaluées, ouvrant la voie à des recherches ultérieures approfondies.

5.2 Méthodologie

5.2.1 Rappel des conditions

Grandeurs d'entrée: les grandeurs utilisées dans ce travail sont plus particulièrement:

- Les propriétés intrinsèques: le module d'Young E , la masse volumique ρ , l'amortissement structural η (variation spatiale et/ou en fréquence).
- Les propriétés de section: l'épaisseur h d'une poutre ou d'une plaque, la largeur w (poutre).

Les propriétés d'assemblage comme la raideur en flexion et en torsion au niveau des attaches ouvrées (collage, rivetage) sont aussi d'un grand intérêt, mais leur implantation est délicate. Aucun résultat du chapitre n'y fait référence. Le choix des grandeurs d'entrée est justifié par les difficultés rencontrées au moment de la modélisation par éléments finis. L'importance accordée à chaque propriété et chaque variable de cette propriété dépend grandement des objectifs et de la compétence de l'ingénieur. Il est difficile d'estimer *à priori* l'influence d'une propriété sur une réponse donnée (Ditlevsen et Tarp-Johansen [21] 1986).

Note importante concernant les grandeurs d'entrée: dans les grandeurs d'entrée, on exclut les propriétés de section dont la variation introduit des précontraintes dans l'assemblage. Dans un treilli, par exemple, la variation de longueur d'une poutre engendre des contraintes dans le reste de la structure. Les précontraintes dépendent donc de la valeur prise par la longueur entre son minimum et son maximum. Le problème n'est pas insoluble, puisqu'il suffit de ramener les précontraintes (fonction de la longueur) dans le terme des forces externes, mais ce n'est pas l'objet de la maîtrise.

Grandeurs de sortie: ce sont les vecteurs propres, les valeurs propres, et l'énergie cinétique spécifique. Il est important de connaître l'évolution des valeurs propres et des vecteurs propres avec l'incertitude des variables d'entrée pour minimiser les effets d'une résonance (les objectifs sont la minimisation de la participation dynamique et l'éloignement maximum entre la fréquence d'excitation et les modes propres de la structure).

Domaine de fréquences utilisé: on exploite seulement les courbes de réponse de l'énergie cinétique spécifique en très basses fréquences pour simplifier l'exploitation des résultats. Le voisinage des résonances est le domaine fréquentiel le plus intéressant, puisqu'on y décèle la faiblesse des méthodes "classiques" (perturbations). En pratique, l'intervalle des fréquences allant de 0 *Hz* aux trois premiers modes de la structure suffit pour tirer toutes les conclusions pertinentes de ce chapitre, incluant la possibilité de croisement de modes sous l'effet des variations de paramètres.

Matériel utilisé (petits modèles éléments finis): pour les méthodes de perturbation et les méthodes PMO (ordres 1, 2 et supérieurs), Matlab et un PC de type 486DX33 suffisent. Pour les simulations de Monté Carlo, un pentium 200MHz a été utilisé, de sorte que toutes les

autres simulations (perturbations et PMO) sont aussi faites à cette vitesse d'horloge aux fins de comparaisons. La méthode de Monté Carlo gagnerait à être parallélisée.

5.2.2 Modèles éléments finis utilisés pour la validation

Généralités sur les modèles: pour toutes les simulations on a utilisé des assemblages de poutres bidimensionnels. Chaque élément de poutre a 6 degrés de liberté, soit 2 déplacements transversaux, 2 déplacements longitudinaux et 2 rotations dans le repère élémentaire. Les déplacements longitudinaux sont négligés dans la structure assemblée (étude en flexion unique-ment). Les petits modèles formés de poutres sont avantageux: calcul de vecteurs propres et valeurs propres rapides, matrices élémentaires petites et analytiquement connues. Le nombre minimal d'éléments par longueur d'onde spatiale est respecté pour les deux ou trois premiers modes de chaque structure (5 éléments par longueur d'onde). Pour les modes supérieurs, chaque méthode introduit une erreur de convergence à priori différente des autres, et il n'est pas certain que les prédictions soient comparables. Pour autant, l'objectif principal du travail reste l'étude de la précision *relative* des résultats plus que la précision absolue. Les modèles utilisés sont représentés sur la figure (5.1).

Modèle de demi-portique: le premier modèle est un demi-portique (figure 5.1 a). Ce modèle permet d'exposer simplement la plupart des résultats obtenus pour des assemblages plus complexes. D'autre part, il permet d'étudier l'effet de croisements de modes sur l'énergie cinétique spécifique maximale. On favorise les croisements en ajustant les longueurs des segments AB et BC à des valeurs voisines. On a modélisé la section AB avec 5 éléments de même longueur (20 cm), et la section BC avec 5 éléments de même longueur (18 cm). Les propriétés globales du demi-portique sont données dans le tableau (5.1). La propriété incertaine choisie est l'épaisseur h_1 de AB, car on a observé son influence particulièrement grande sur les réponses. La moyenne de la variable h_1 est celle de l'épaisseur h de AB du tableau (5.1). L'intervalle d'incertitude est précisé en temps voulu. Les premières fréquences propres moyennes et les déformées sont présentées à la figure (5.2).

Assemblage plan de poutres: le deuxième modèle est un treilli (figure 5.1 b). Ce modèle sert essentiellement à valider la robustesse de la nouvelle méthode avec un nombre assez important de variables incertaines, de 2 à 5. Il peut s'agir de la représentation synthétique d'un immeuble

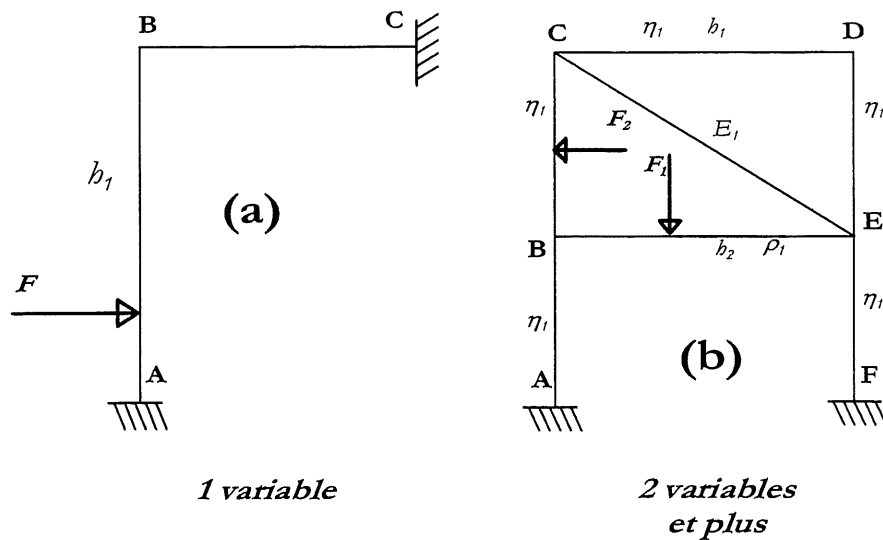


Figure 5.1: Modèles utilisés dans le mémoire pour étudier l'énergie cinétique spécifique maximale à l'aide des algorithmes de prédiction. Les variables indiquées sont incertaines sur la section considérée.

Section AB	Section BC
$E = 200 \cdot 10^9 \text{ pa}$	$E = 200 \cdot 10^9 \text{ pa}$
$\star h = 30.0 \text{ mm}$	$h = 10.0 \text{ mm}$
$w = 10.0 \text{ mm}$	$w = 10.0 \text{ mm}$
$L = 1.0 \text{ m}$	$L = 0.9 \text{ m}$
$\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$	$\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$
$\eta = 0.01$	$\eta = 0.01$

Tableau 5.1: Propriétés physiques du demi-portique: sauf cas particulier, les valeurs s'appliquent à tous les éléments de chaque section. L'étoile indique une variable incertaine.

d'un étage. Les deux forces sont placées de façon à exciter le maximum de modes. Pour les trois premières déformées, on a jugé suffisant de modéliser chaque section avec 2 éléments de poutre, soit 14 éléments au total. Il s'agit d'un strict minimum. Les propriétés physiques du treilli sont données dans le tableau (5.2), et les premières déformées et fréquences propres associées sont présentées

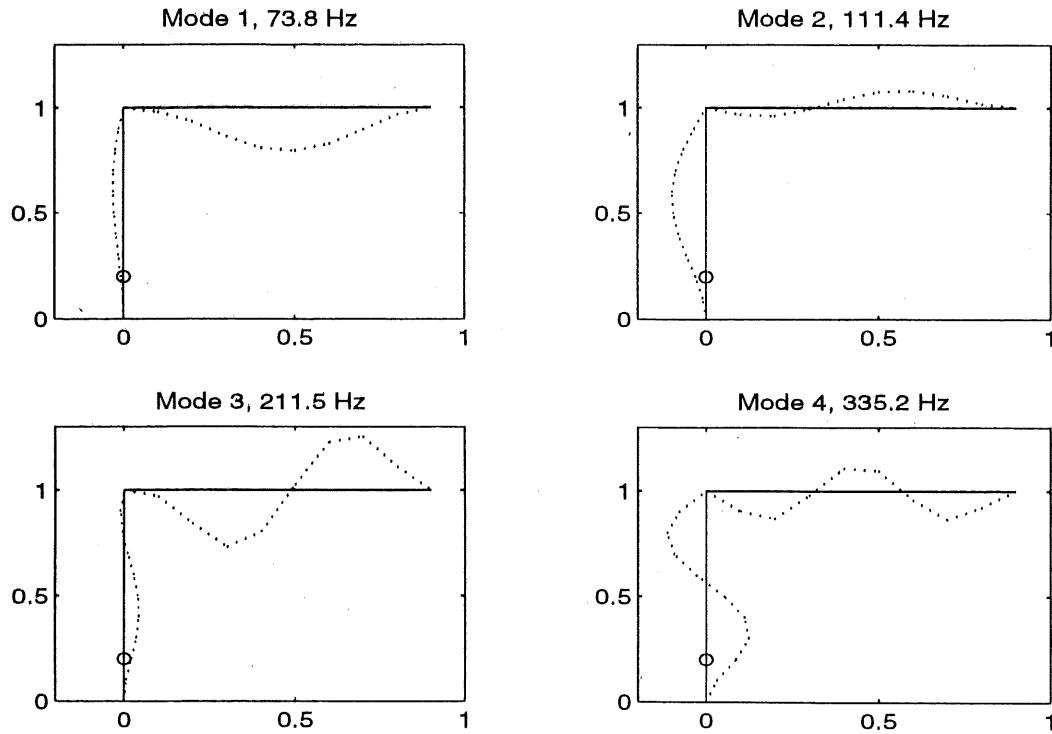


Figure 5.2: Premières déformées du portique, et premières fréquences propres moyennes. Le cercle représente le point d'application approximatif de la force.

à la figure (5.3). Les variables incertaines sont l'amortissement η_1 du cadre (AB-BC-CD-DE-EF), l'épaisseur h_1 de CD, l'épaisseur h_2 de BE, le module d'Young E_1 de CE et la masse volumique ρ_1 de BE. Leur valeur moyenne est celle du tableau (5.2).

Sections AB-BC-DE-EF	Section CD	Section CE	Section BE
$E = 200 \cdot 10^9 \text{ pa}$	$E = 200 \cdot 10^9 \text{ pa}$	$E = 200 \cdot 10^9 \text{ pa}$	$E = 200 \cdot 10^9 \text{ pa}$
$h = 10.0 \text{ mm}$	$\star h = 25.0 \text{ mm}$	$h = 30.0 \text{ mm}$	$\star h = 25.0 \text{ mm}$
$w = 100.0 \text{ mm}$	$w = 100.0 \text{ mm}$	$w = 100.0 \text{ mm}$	$w = 100.0 \text{ mm}$
$L = 1.0 \text{ m}$	$L = 2.0 \text{ m}$	$L = 1.73 \text{ m}$	$L = 2.0 \text{ m}$
$\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$	$\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$	$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$	$\star \rho = 7900 \text{ kg/m}^3$
$\star \eta = 0.02$	$\star \eta = 0.02$	$\eta = 0.01$	$\eta = 0.01$

Tableau 5.2: Propriétés physiques du treilli: sauf cas particulier, les valeurs s'appliquent à tous les éléments de chaque section. Une étoile représente une variable incertaine.

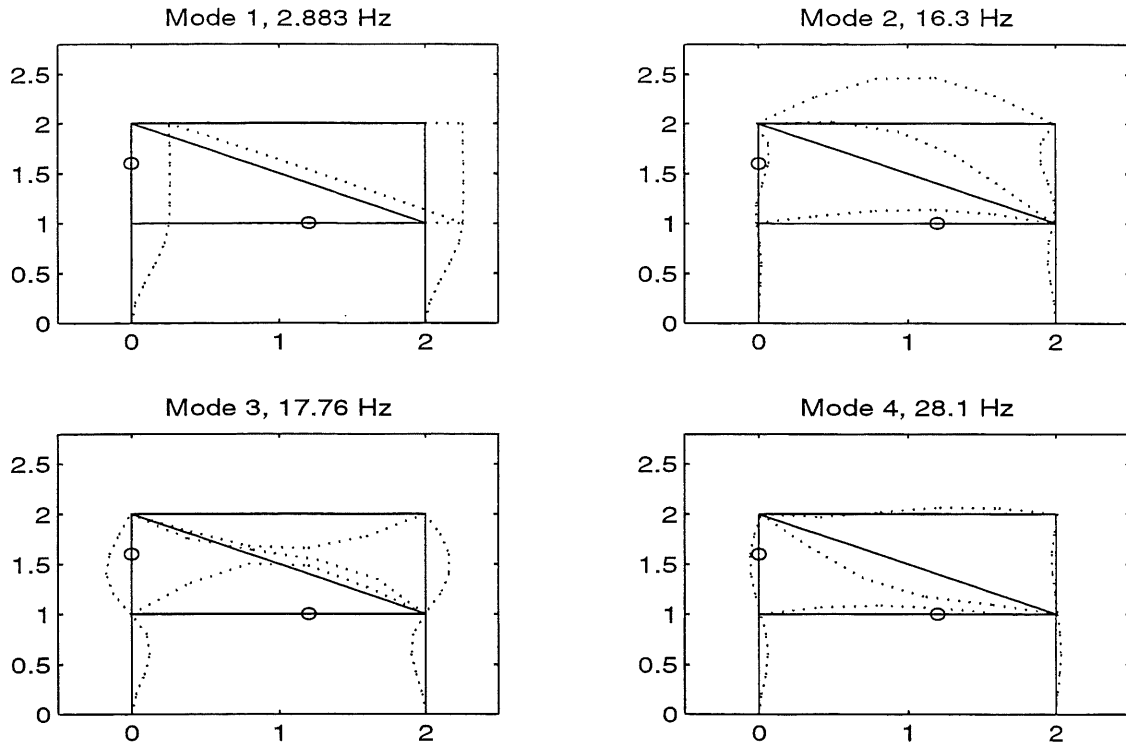


Figure 5.3: Premières déformées du treilli, et premières fréquences propres moyennes. Les cercles représentent les points d'application approximatifs des forces.

5.2.3 Elaboration du fichier d'entrée

Contenu: le fichier de données du modèle d'éléments finis doit préciser:

- Quelles sont les propriétés incertaines: module d'Young, épaisseur, amortissement.
- Quelles sont les variables incertaines de chaque propriété (ne pas confondre propriété et variable de cette propriété): module d'Young E_1 sur une partie de la structure et E_2 sur une autre partie, etc...
- Quels sont les éléments auxquels s'appliquent les variables incertaines de chaque propriété. On regroupe les éléments qui partagent la même variable incertaine (raideur des bords de plaques collées, etc...).
- Quels sont les intervalles associés à chaque variable.

Disposition de l'information: la disposition des informations peut être la suivante (voir la figure 5.4): dans un tableau T_1 dont les lignes sont les numéros d'éléments et les colonnes les propriétés incertaines on inscrit pour chaque élément et chaque propriété le numéro de la variable concernée. Un numéro de variable négatif dans l'une des cases du tableau T_1 indique une variable déterministe, tandis qu'un numéro positif indique une variable incertaine. Pour les variables incertaines, des tableaux T_{2i} indiquent pour chaque propriété i et chaque variable de cette propriété son maximum et son minimum. Il est important de ne pas perdre le lien qui lie la propriété et les variables incertaines associées pendant l'assemblage (voir l'assemblage, plus bas). De façon analogue, les tableaux T_{3i} font le lien entre les variables déterministes et les valeurs de ces variables.

5.2.4 Stratégies d'assemblages

Préparation des données: le tableau T_1 est à la base du processus d'assemblage des matrices. Pour chaque nouvel élément, le tableau T_1 donne les propriétés et les numéros de variables déterministes (certaines) qui doivent être initialisées, par lecture des tableaux T_{3i} . Les raideurs et masses ajoutées déterministes, si il y en a, sont ajoutées de façon classique aux matrices assemblées. Pour les variables incertaines, une préparation préassemblage est requise. Il faut donc lire en entier le tableau T_1 et les tableaux T_{2i} . La préparation pré-assemblage consiste à établir un plan de simulations, qui diffère selon les méthodes.

Méthode de Monté Carlo: on crée des tableaux de tirages pseudo-aléatoires pour chaque variable incertaine, étant donnés son maximum et son minimum. Pour chaque variable, on réinitialise le premier terme de la suite pseudo-aléatoire (le germe de la suite, "seed" en anglais) pour éviter le bouclage des valeurs.

Méthode de perturbations: le développement de Taylor exige la connaissance des moyennes de chaque variables. On calcule les valeurs moyennes des variables à partir de leur maximum et minimum (tableaux T_{2i}).

Méthode PMO: on construit le tableau des simulations nécessaires pour déterminer les coefficients des polynômes d'approximation des valeurs propres et des vecteurs propres. Ce point

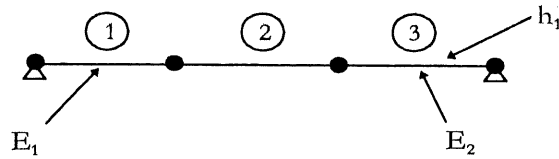


Tableau T₁:

éléments	Propriétés	
	E	h
	1	-1
2	-1	-1
3	2	1

Tableaux T₂: variables incertaines E₁, E₂, h₁

Module d'Young			Epaisseur			
variables		min	max		min	max
	1	180 Mpa	220 Mpa	1	0.5 mm	0.8 mm
	2	160 Mpa	170 Mpa			

Tableaux T₃: autres variables (certaines)

variable	Module d'Young		Epaisseur	
	Valeur		valeur	
	-1	210 Mpa	-1	0.7 mm

Figure 5.4: Tableaux de propriétés de la méthode d'éléments finis PMO pour une poutre simplement supportée et 3 variables incertaines (par exemple).

est discuté plus en détail dans les sections suivantes.

5.2.5 Plan d'étude des résultats

Les prochaines sections présentent les résultats de validation de la méthode modale (PMO). Trois axes de recherche sont retenus: l'approximation des vecteurs et des valeurs propres, le calcul de l'énergie cinétique spécifique maximale, et l'efficacité comparée des algorithmes PMO, Monté Carlo et perturbations en vitesse de calcul et flux de données. Ces axes de recherche sont inspirés des principes fondamentaux de la méthode PMO, principes qui sont **l'approximation polynômiale des vecteurs et valeurs propres** pour accélérer les calculs, et l'utilisation d'un **algorithme d'optimisation** pour trouver les combinaisons de paramètres d'entrée qui maximisent l'énergie cinétique spécifique maximale. L'étude de l'optimisation n'aborde pas les méthodes de programmation linéaire ni les méthodes SLP et SQP (voir Singiresu [74] 1996).

5.3 Approximation des vecteurs et fréquences propres

5.3.1 Conditions d'approximation

L'approximation précise des vecteurs propres et des fréquences propres en fonction des paramètres d'entrée est basée sur l'hypothèse de faible variabilité. Cette hypothèse est valable si l'intervalle d'incertitude des paramètres n'est pas trop grand. Toutefois, cette restriction est peu sévère en comparaison de la limitation imposée par la méthode de perturbations. Il est beaucoup plus facile en effet de trouver une bonne approximation des vecteurs propres et des valeurs propres (variables intermédiaires) que de trouver une bonne approximation de l'énergie cinétique spécifique (variable finale de la méthode des perturbations) en raison d'effets hautement non linéaires aux résonances.

5.3.2 Approximations linéaire et quadratique

Principe: sous les conditions précédentes, l'approximation linéaire est la plus appropriée. L'approximation quadratique (ou une approximation d'ordre supérieur) est utilisée pour améliorer les résultats de l'approximation linéaire, mais le problème d'optimisation obtenu est plus complexe et moins robuste. En général, on fait l'hypothèse que les variables sont faiblement couplées pour

simplifier les calculs. Si les fréquences sont complexes, on approxime séparément la partie imaginaire et la partie réelle, ou le module (souvent, les trois informations sont utiles). Les modèles linéaires et quadratiques des fréquences propres à n variables d'entrée sont les suivants:

$$\omega_k = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad (5.1)$$

$$\omega_k = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 \quad (\text{sans couplage}) \quad (5.2)$$

$$\omega_k = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j \geq i}^n b_{ij} x_i x_j \quad (\text{avec couplage}) \quad (5.3)$$

L'approximation des vecteurs propres est plus délicate. L'approximation par degrés de liberté est la plus simple: le vecteur exact $\{\Phi_k\}$ s'exprime dans la base des *vecteurs coefficients* $\{\Upsilon_k\}_i$ et $\{\Xi_k\}_i$ (équations 5.4 à 5.6). Chaque vecteur coefficient est calculé séparément. Cette technique demande un stockage assez important. Si les vecteurs propres sont complexes, on approxime leur partie réelle et imaginaire, ou leur module et argument.

$$\{\Phi_k\} = \{\Upsilon_k\}_0 + \sum_{i=1}^n \{\Upsilon_k\}_i x_i \quad (5.4)$$

$$\{\Phi_k\} = \{\Upsilon_k\}_0 + \sum_{i=1}^n \{\Upsilon_k\}_i x_i + \sum_{i=1}^n \{\Xi_k\}_i x_i^2 \quad (\text{sans couplage}) \quad (5.5)$$

$$\{\Phi_k\} = \{\Upsilon_k\}_0 + \sum_{i=1}^n \{\Upsilon_k\}_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j \geq i}^n \{\Xi_k\}_{ij} x_i x_j \quad (\text{avec couplage}) \quad (5.6)$$

Ces approximations ne sont pas utilisées en pratique, car le calcul des coefficients fait intervenir des matrices de Vandermonde mal conditionnées (surtout pour l'approximation quadratique). Le mauvais conditionnement est dû à la différence relative des ordres de grandeur des variables x_i du polynôme (module d'Young exprimé en pascals et épaisseur en millimètres, par exemple). La solution consiste à normaliser les variables x_i avec la transformation linéaire suivante:

$$y_i = \alpha_i x_i - \beta_i \quad (5.7)$$

où

$$\alpha_i = \frac{1}{x_{max_i} - x_{min_i}} \quad (5.8)$$

$$\beta_i = \frac{x_{min_i}}{x_{max_i} - x_{min_i}} \quad (5.9)$$

Choix des points d'interpolation des approximations: l'approximation linéaire à n variables exige de calculer les valeurs exactes des vecteurs et valeurs propres en $n + 1$ points (pour les $n + 1$ coefficients du polynôme). L'approximation quadratique à n variables *découplées* exige de calculer les valeurs exactes des vecteurs et valeurs propres en $2n + 1$ points. L'approximation quadratique à n variables *couplées* exige de calculer les valeurs exactes des vecteurs et valeurs propres en $2n + 1 + n(n - 1)/2$ points. La position des points dans l'espace des paramètres peut être quelconque. En pratique, on utilise deux méthodes:

- Le tirage aléatoire des points.
- La répartition régulière des points dans l'espace.

Le tirage aléatoire est peu avantageux pour la précision de l'approximation, car la disposition des points n'est pas optimale. La répartition régulière des points exploite mieux la faible variabilité des fonctions $\omega_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\{\Phi_k\}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Si l'approximation est linéaire, la construction des points de simulation obéit au schéma suivant: le premier point M_1 est donné par

$$M_1 \begin{pmatrix} x_{min_1} \\ x_{min_2} \\ \vdots \\ x_{min_n} \end{pmatrix}$$

et les autres points de simulation s'obtiennent par permutation circulaire:

$$M_2 \begin{pmatrix} \mathbf{xmin}_1 \\ x_{max_2} \\ \vdots \\ x_{max_n} \end{pmatrix} \quad M_3 \begin{pmatrix} x_{max_1} \\ \mathbf{xmin}_2 \\ \vdots \\ x_{max_n} \end{pmatrix} \quad \dots \quad M_{n+1} \begin{pmatrix} x_{max_1} \\ x_{max_2} \\ \vdots \\ \mathbf{xmin}_n \end{pmatrix}$$

Si l'approximation est quadratique découplée, le premier point est donné par:

$$P_1 \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

et les n premier points par:

$$P_2 \begin{pmatrix} \mathbf{xmax}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \quad P_3 \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \mathbf{xmax}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \quad \dots \quad P_{n+1} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{xmax}_n \end{pmatrix}$$

et les n derniers points:

$$P_{n+2} \begin{pmatrix} \mathbf{xmin}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \quad P_{n+3} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \mathbf{xmin}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \quad \dots \quad P_{2n+1} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{xmin}_n \end{pmatrix}$$

Il existe d'autres configurations découplées. En quadratique couplé, les points supplémentaires sont pris aléatoirement (à la connaissance de l'auteur il n'existe pas de répartition optimale des points pour le problème couplé, à savoir une configuration pour laquelle les points sont répartis à égale distance les uns des autres). La figure (5.5) montre la disposition schématique des points pour trois variables d'entrée.

5.3.3 Approximation des fréquences propres: résultats et discussions

Intérêt d'une approximation précise des fréquences propres: l'algorithme d'optimisation est basé essentiellement sur l'approximation des fréquences propres. L'approximation précise des fréquences propres permet de trouver les combinaisons précises des paramètres qui donnent l'énergie cinétique spécifique maximale. Dans cette section, on montre que l'approximation linéaire est bonne pour de petits intervalles d'incertitudes. Pour des incertitudes plus élevées (dépendant du

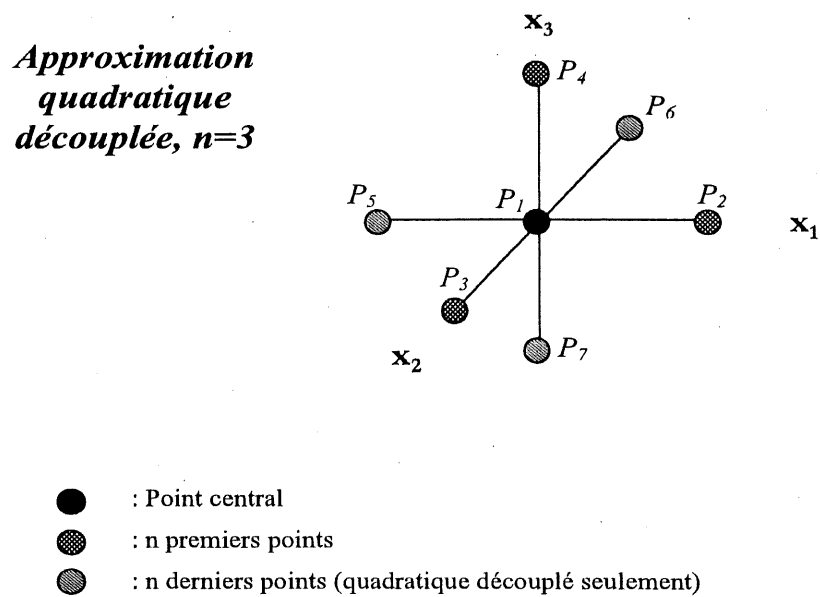
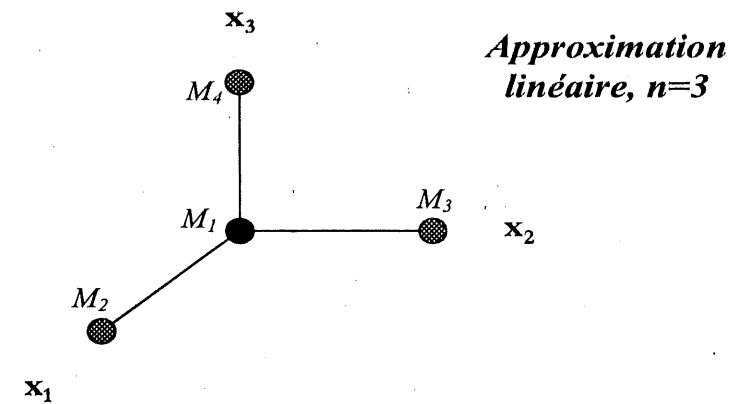


Figure 5.5: Disposition schématique des points de simulation servant à l'approximation linéaire et quadratique des vecteurs propres et des fréquences propres, cas à 3 variables.

paramètre) les approximations quadratiques et cubiques donnent de meilleures approximations, mais certains "effets de bords" comme l'oscillation des polynômes en limite l'usage.

Comportement des fréquences propres: les fréquences propres sont des fonctions implicites des paramètres d'entrée. Le caractère implicite des relations rend très difficile la prédiction du comportement des fréquences propres en fonction des paramètres pris individuellement. Toutefois, quelques relations analytiques pour des problèmes simples donnent une idée assez générale de leur comportement. C'est le cas des poutres et des plaques simplement supportées. Les fréquences propres de la poutre simplement supportée sont données par l'équation (5.10).

$$\omega_k = \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (5.10)$$

Pour une poutre de section rectangulaire de largeur w et de hauteur h , la relation se simplifie car $I = bh^3/12$ et $S = bh$:

$$\omega_k = \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 h \sqrt{\frac{E}{12\rho}} \quad (5.11)$$

On constate que la fréquence propre est une fonction linéaire de l'épaisseur et une fonction racine carrée du module d'Young, ce qui explique qu'une approximation linéaire de ω_k soit particulièrement efficace pour ces deux variables dans leur domaine d'utilisation (figure 5.6). On voit en outre que l'approximation linéaire des valeurs propres $\lambda_k = \omega_k^2$ est une mauvaise approximation relativement à l'épaisseur, mais une bonne approximation relativement au module d'Young. La précision des résultats repose donc sur un choix adéquat de la fonction approximée et de la nature de l'approximation:

- Nature de l'approximation: approximation polynômiale linéaire, approximation polynômiale quadratique découplée ou couplée, approximation d'ordres supérieurs, approximation multi-linéaire, approximation trigonométrique (pour les paramètres de raideur et masse).
- Fonction approximée: l'approximation d'une puissance de ω_k est un choix judicieux. La variable p de la puissance est calculée par résolution d'un système non linéaire contenant les coefficients polynômiaux et p . La puissance peut être imposée également.

$$\omega_k^p = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad (5.12)$$

On s'est essentiellement penché sur les approximations linéaires et quadratiques des fréquences propres ω_k , laissant l'évaluation des autres approximations à des travaux futurs. D'autre part, on expose d'abord les résultats obtenus avec le demi-portique (une seule variable incertaine) par souci de simplicité.

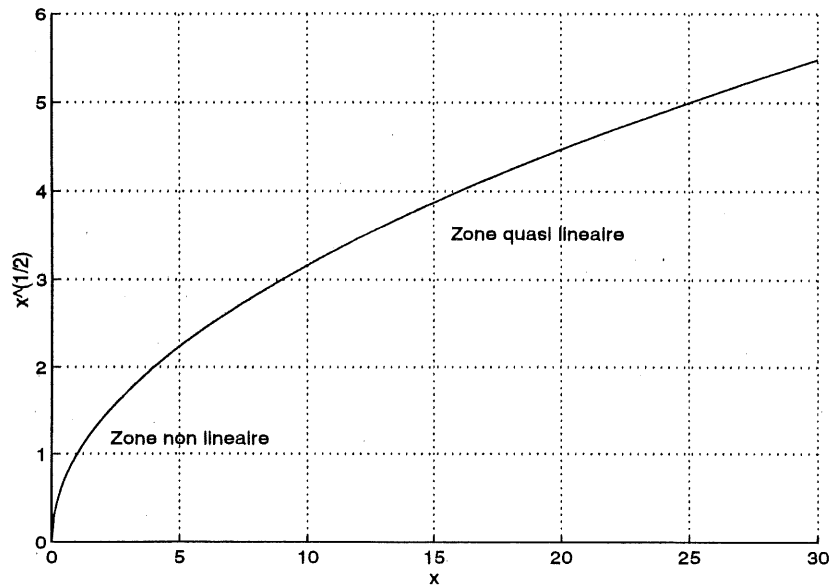


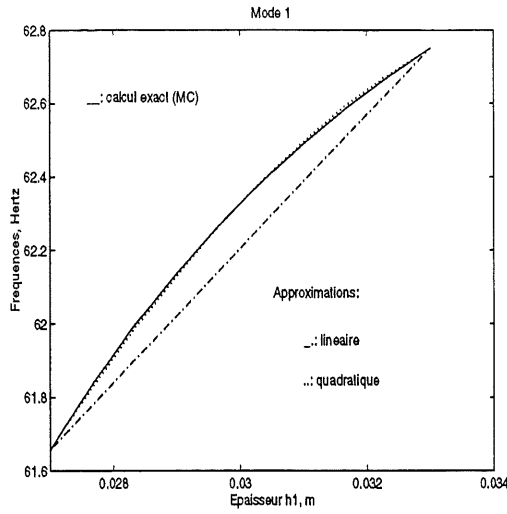
Figure 5.6: Fonction racine carrée: mise en évidence de zones non linéaire et quasi linéaire.

Qualité de l'approximation, étude avec une variable incertaine: afin de montrer simplement les caractéristiques de chaque approximation (linéaire et quadratique), les trois premières fréquences propres du demi-portique sont tracées en fonction de l'épaisseur h_1 sur les figures (5.7) à (5.9). La valeur moyenne de h_1 étant de 30.0 mm, l'incertitude de 10% correspond à l'intervalle de variation 27.0 - 33.0 mm, et l'incertitude de 60% à l'intervalle 12.0 - 48.0 mm. Dans la suite de l'exposé, on définit l'incertitude de la variable x_i comme le rapport du demi-intervalle d'incertitude sur la moyenne, soit:

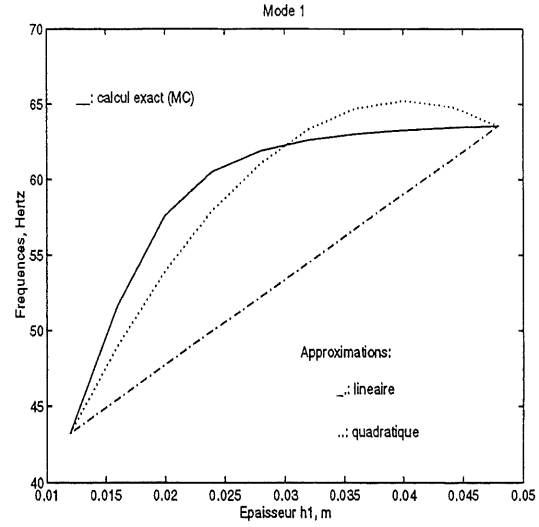
$$\Delta_{x_i} = \frac{1}{2} \frac{x_{max_i} - x_{min_i}}{\bar{x}_i} \quad (5.13)$$

Les figures (5.7) à (5.9) montrent les points suivants:

- Le niveau d'incertitude joue un rôle considérable dans la qualité de l'approximation.



(a) $\Delta_{h_1} = 10\%$



(b) $\Delta_{h_1} = 60\%$

Figure 5.7: Demi-portique: première fréquence propre tracée en fonction de h_1 pour deux valeurs d'incertitude, 10 et 60%.

- L'augmentation de l'ordre de l'approximation permet d'augmenter l'adéquation avec la courbe exacte. A la limite, un ordre très élevé garantirait l'adéquation parfaite.
- Les formes des courbes sont très différentes d'un mode à l'autre. Pour le même paramètre d'entrée, l'approximation linéaire surestime le deuxième mode, mais sous-estime le premier et le troisième modes.

Sur les figures (5.7) à (5.9) l'approximation quadratique est meilleure que l'approximation linéaire dans le sens où elle minimise l'écart avec la courbe exacte pour une épaisseur donnée. Cependant, une étude plus rigoureuse est nécessaire:

- Pour une épaisseur donnée, les approximations linéaire et quadratique de la fréquence propre sont d'autant plus erronées que la pente de la courbe exacte est grande (voir la figure 5.7 (b) entre 15 et 20 mm). L'effet de cette erreur est un décalage en fréquence de l'estimation de l'énergie cinétique spécifique maximale. Les simulations montrent que le décalage est le plus souvent imperceptible (voir la section 5.4).

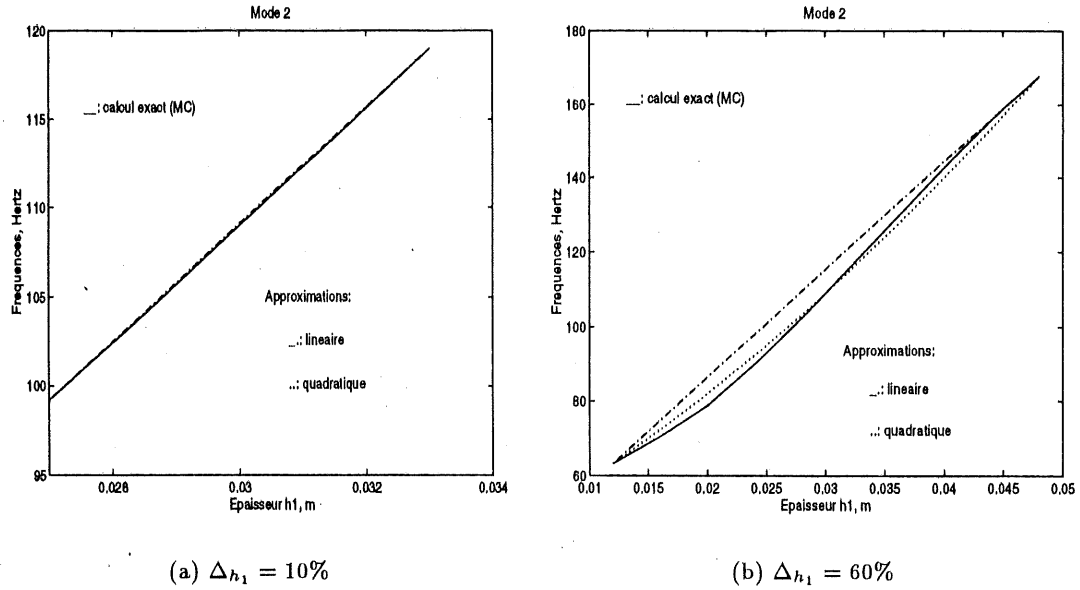


Figure 5.8: Demi-portique: deuxième fréquence propre tracée en fonction de h_1 pour deux valeurs d'incertitude, 10 et 60%.

- Pour une fréquence donnée, les paramètres exacts et approchés sont d'autant plus éloignés que la pente de la courbe exacte est faible (figure 5.7 (b) entre 62 et 65 Hz). L'effet de cette erreur est une mauvaise prédiction de la participation dynamique, puisqu'elle est calculée à partir des valeurs optimales des variables incertaines (les valeurs qui assurent la résonance d'un mode donné).

On peut donc conclure en général que ni l'approximation linéaire ni l'approximation quadratique ne donnent des estimations parfaitement exactes du maximum de la réponse. Afin d'estimer la vitesse de convergence de la précision quand l'ordre augmente, on a tracé l'approximation cubique de la troisième fréquence propre (figure 5.10). On voit que l'approximation cubique permet entre autre de modéliser les points d'inflexion. L'approximation est excellente sauf pour la bande de fréquences 175 - 180 Hz (pente très faible donc erreur importante sur les paramètres).

Note importante: les différentes méthodes (Monté Carlo, perturbations et PMO) ne peuvent pas échanger de données intermédiaires, car ceci rompt la cohérence interne des algorithmes. Par exemple, on ne peut pas valider les calculs de la méthode PMO en donnant à un autre

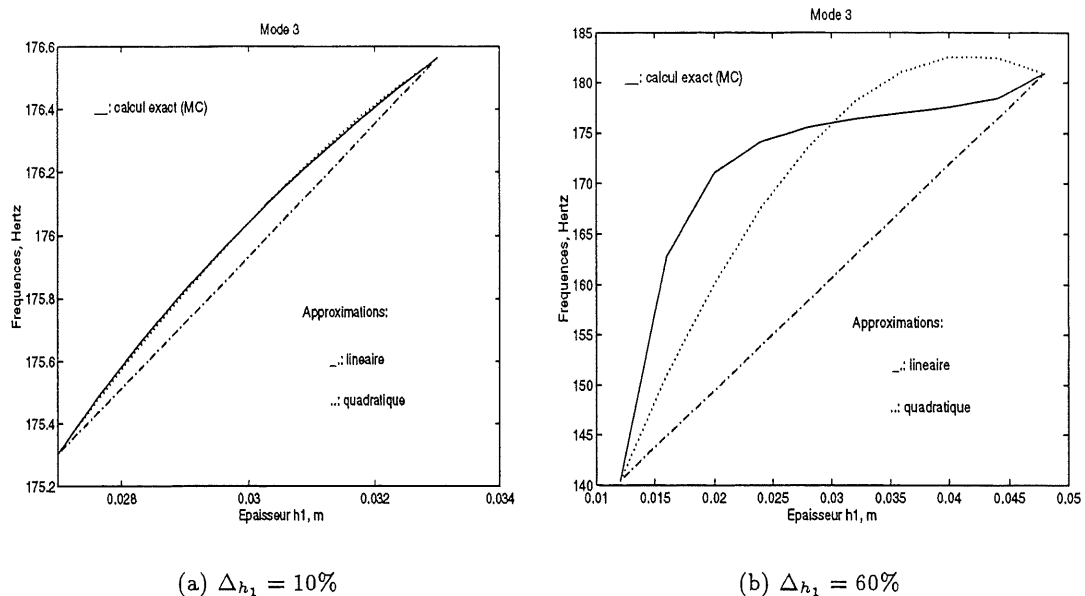


Figure 5.9: Demi-portique: troisième fréquence propre tracée en fonction de h_1 pour deux valeurs d'incertitude, 10 et 60%.

algorithme, comme Monté Carlo, les valeurs des paramètres approchés pour calculer l'énergie cinétique spécifique maximale (sauf si l'approximation des vecteurs propres et des fréquences propres est "idéale", c'est à dire d'erreur uniformément nulle). Par conséquent, il faut prendre quelques précautions pour créer un programme hybride. L'auteur du mémoire ne s'est pas penché sur le problème.

Qualité de l'approximation, étude avec plusieurs variables incertaines: on définit un indicateur de qualité des approximations aux fins de comparaisons avec une méthode de Monté Carlo. On compare les fréquences propres approchées $\hat{\omega}_k$ aux fréquences propres réelles ω_k pour des combinaisons des paramètres n'ayant pas servi à calculer les coefficients d'approximation. Le plus grand écart avec la valeur exacte sert à définir l'indicateur de précision des fréquences propres:

$$\varepsilon_{\omega_k} = \max \frac{|\hat{\omega}_k - \omega_k|}{\omega_k} \quad (5.14)$$

Cet indicateur ne doit pas prêter à confusion: *une grande erreur relative n'indique pas une erreur relative comparable de l'énergie cinétique spécifique maximale*. On compare le premier mode exact du treilli avec le mode approché. Les variables incertaines sont celles de la section méthodologie:

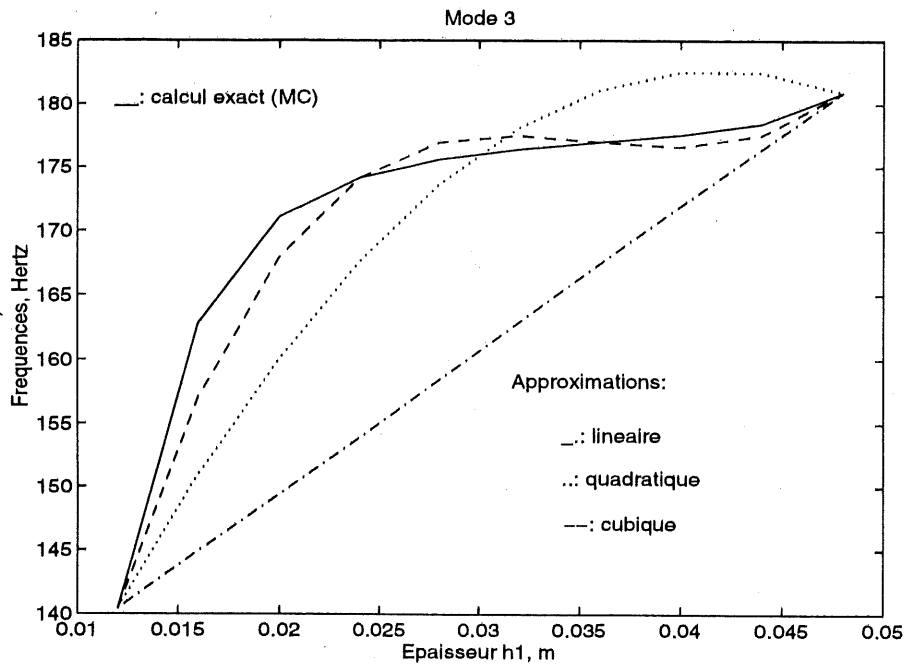


Figure 5.10: Demi-portique: troisième fréquence propre tracée en fonction de h_1 pour 60% d'incertitude. Approximation cubique.

module d'Young, amortissement, épaisseur et masse volumique pour le treilli. On donne à toutes les variables la même incertitude à la fois. Les tableaux (5.3) à (5.5) montrent les résultats des comparaisons pour deux types d'approximations polynômiales, linéaire et quadratique. On observe les points suivants:

- Les approximations sont de moins en moins bonnes à mesure que l'incertitude des variables augmente. De plus, la qualité des approximations dépend beaucoup des variables.
- Le nombre de variables n'est pas un obstacle majeur à la qualité des approximations. Cependant, aux incertitudes élevées (30 % et plus), une méthode plus précise que l'approximation linéaire est souhaitable, par exemple une approximation quadratique, cubique ou multilinéaire (approximation linéaire de sous-domaines de l'énergie cinétique spécifique sur C_n).
- La prise en compte du couplage dans l'approximation quadratique n'apporte pas toujours une meilleure précision. Beaucoup d'auteurs négligent le couplage.

Note particulière: on peut tester la validité de l'approximation linéaire en ajoutant aléatoirement des points de calcul. Un test sur l'indicateur ε_{ω_k} permet de juger la qualité de l'approximation et de lancer au besoin une méthode quadratique ou une méthode d'ordre supérieur.

Approximation \ Δ_{x_i}	Mode 1			Mode 2		
	10%	30%	60%	10%	30%	60%
Linéaire	0.08	0.86	4.82	1.61	8.28	19.82
Quadratique découplée	0.00	0.01	0.02	0.01	0.05	0.98
Quadratique couplée	0.00	0.00	0.01	0.00	0.05	0.98

Tableau 5.3: Treilli, trois variables incertaines: E_1 , ρ_1 et h_2 . Deux premières fréquences propres. Valeurs de l'indicateur en % pour des incertitudes croissantes.

Approximation \ Δ_{x_i}	Mode 1			Mode 2		
	10%	30%	60%	10%	30%	60%
Linéaire	0.03	0.20	6.12	1.05	6.76	24.59
Quadratique découplée	0.00	0.02	0.03	0.00	0.05	0.98
Quadratique couplée	0.00	0.02	0.03	0.00	0.04	0.97

Tableau 5.4: Treilli, quatre variables incertaines: E_1 , ρ_1 , h_1 et h_2 . Deux premières fréquences propres. Valeurs de l'indicateur en % pour des incertitudes croissantes.

Approximation \ Δ_{x_i}	Mode 1			Mode 2		
	10%	30%	60%	10%	30%	60%
Linéaire	0.02	0.39	6.51	1.17	6.62	24.03
Quadratique découplée	0.00	0.02	0.06	0.00	0.06	0.99
Quadratique couplée	0.00	0.02	0.05	0.00	0.05	0.97

Tableau 5.5: Treilli, cinq variables incertaines: E_1 , ρ_1 , h_1 , h_2 et η_1 . Deux premières fréquences propres. Valeurs de l'indicateur en % pour des incertitudes croissantes.

Conséquences probables des différentes approximations sur le calcul de l'énergie cinétique spécifique: lors du calcul de l'énergie cinétique spécifique maximale au voisinage des résonances, on cherche le maximum de la participation dynamique (en valeur absolue) sous la

contrainte suivante:

$$\omega = \omega_k \quad (5.15)$$

En pratique c'est l'équation (5.16) que l'on résoud:

$$\omega = \hat{\omega}_k \quad (5.16)$$

En remplaçant $\hat{\omega}_k$ par son développement linéaire par exemple, (5.15) devient l'équation d'un hyperplan de dimension n dans l'espace Ω_{n+1} :

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i + (a_0 - \omega) = 0 \quad (5.17)$$

La substitution de l'équation approchée à l'équation exacte provoque une erreur d'estimation *des paramètres optimaux* (la combinaison de ces paramètres est notée \mathcal{E}_k au chapitre 4). On a vu que cette erreur n'altérerait pas l'estimation *des fréquences propres* tant que l'algorithme est cohérent. En revanche, la participation dynamique risque d'être mal évaluée si l'approximation des vecteurs propres n'est pas équivalente en tout point à l'approximation des fréquences propres, puisque la cohérence interne des calculs est rompue. On étudie maintenant les approximations des vecteurs propres pour évaluer cette assertion.

5.3.4 Approximation des vecteurs propres: résultats et discussions

Intérêt d'une approximation précise des vecteurs propres: les vecteurs propres permettent de reconstruire la participation dynamique et de prédire la position des nœuds et des ventres à l'énergie cinétique spécifique maximale. Cette information permet de modifier la déformée des modes et d'en atténuer certains effets (résonances destructrices).

Problèmes théoriques concernant l'approximation des vecteurs propres: l'étude des vecteurs propres est plus délicate que l'étude des fréquences propres. Les raisons principales, discutées plus bas, sont:

- Le signe des composantes des vecteurs propres peut changer de façon naturelle *et* de façon aléatoire d'une combinaison de paramètres à l'autre .

- La précision de l'approximation dépend de la normalisation des vecteurs.

Changement de signe des vecteurs propres: la plupart des routines calculent les vecteurs propres sans tenir compte de leur signe. Cela n'a pas d'importance pour un calcul classique d'analyse dynamique si la cohérence des opérations de changement de bases est maintenue. Dans ce cas, chaque vecteur $\{\Phi\}_k$ est utilisé une seule fois pour une valeur précise des paramètres. En revanche, la méthode de prédiction exige de calculer l'approximation du même vecteur pour des valeurs différentes des paramètres d'entrée. Par conséquent, les routines peuvent introduire un changement de signe entre deux versions du vecteur, rompant la cohérence de l'approximation. Le caractère aléatoire du changement peut donner de bonnes approximations pour un modèle et faire croire que les résultats sont corrects quelque soit la structure étudiée, ce qui est dangereux. Une correction de signe est nécessaire.

Cette correction est délicate pour la raison suivante: d'une valeur des paramètres d'entrée à l'autre, *il ne suffit pas de suivre l'évolution du signe d'un seul degré de liberté* pour en déduire que le vecteur d'un ordre k donné doit être corrigé. En effet, le changement de signe sur ce degré de liberté peut être *un effet naturel* de la modification du vecteur avec les paramètres, et non un effet aléatoire dû à la routine. Il s'agit donc de *distinguer l'effet naturel de l'effet aléatoire*.

Une technique robuste *pour les vecteurs propres de composantes réelles* consiste à suivre les degrés de liberté qui sont au voisinage des amplitudes les plus grandes, minimisant ainsi le risque d'un changement de signe naturel. L'indicateur MAC (Modal Assurance Criterion, Allemang et Brown [3] 1982) est encore plus robuste car il tient compte de tous les degrés de liberté. Originellement utilisé pour vérifier l'orthogonalité de vecteurs réels d'ordres différents, cette version de l'indicateur est appliquée au même mode k , pour deux simulations successives, l'une au point $M_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ et l'autre au point $M_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$:

$$MAC_k^{(1,2)} = \frac{\{\Phi_k\}_1^T \cdot \{\Phi_k\}_2}{\|\{\Phi_k\}_1\|_2 \|\{\Phi_k\}_2\|_2} \quad (5.18)$$

Si le MAC est négatif, la majorité des degrés de liberté du vecteur $\{\Phi_k\}$ changent de signe de M_1 à M_2 : le deuxième vecteur, soit $\{\Phi_k\}_2$ doit être corrigé par rapport au premier, soit $\{\Phi_k\}_1$. Si le MAC est positif, la majorité des degrés de liberté ne changent pas de signe quand les paramètres varient, et aucune correction n'est nécessaire. Un MAC positif donne aussi des informations précieuses sur l'influence des paramètres sur les vecteurs (étude de sensibilité). Deux cas sont possibles:

- Le MAC est voisin de 1: les vecteurs sont sensiblement identiques, et la variation des paramètres influence peu les vecteurs propres.
- Le MAC est faible: le vecteur propre est fortement influencé. En particulier, les noeuds ont changé de place, et l'approximation linéaire n'est peut être pas suffisante.

Si les vecteurs propres sont complexes (amortissements répartis), on approxime séparément la partie réelle et la partie imaginaire.

$$\{\Phi_k\} = \{\Phi_k\}_{Re} + j\{\Phi_k\}_{Im} \quad (5.19)$$

L'indicateur MAC est appliqué à chacune des parties réelle et imaginaire pour rétablir la cohérence des signes. Cette stratégie donne des résultats faux pour la raison suivante: dans le cas des vecteurs réels (traité plus haut), la modification des paramètres entraîne des variations naturelles de signe *qui restent localisées* à certains degrés de liberté, abstraction faite des variations aléatoires de signe qui affectent l'ensemble du vecteur. Par conséquent, sans variation globale et aléatoire de signe, l'indicateur MAC est toujours positif. Dans le cas des vecteurs complexes, l'une des deux parties réelle ou imaginaire peut l'emporter sur l'autre *sur l'ensemble des degrés de liberté*, situation qui est schématisée à la figure (5.11). Dans ce cas, la variation des paramètres entraîne un changement de signe naturel de la partie la plus faible: soit la partie réelle (a), soit la partie imaginaire (b). Ce changement de signe affecte *tout ou partie* des degrés de liberté, ce qui peut faire basculer le signe de l'indicateur MAC de la partie faible. Selon l'algorithme utilisé pour les vecteurs réels, le basculement du signe entraîne, à tort cette fois, un rétablissement de signe. Par conséquent, seule l'indication du MAC *de la partie la plus forte* permet de décider du changement de signe de la partie imaginaire et de la partie réelle. La norme de $\{\Phi_k\}_{Re}$ et $\{\Phi_k\}_{Im}$ permet de déterminer la plus forte partie. Cette technique reste limitée à des variations raisonnables des paramètres d'entrée.

Normalisation des vecteurs propres: les vecteurs propres sont normalisés pour pouvoir construire une base modale cohérente et simple. La norme infinie et la normalisation par rapport à la masse sont les outils les plus couramment utilisés:

$$\|\{\Phi_k\}\|_{\infty} = 1 \quad (5.20)$$

$$\{\Phi_k\}^T [M] \{\Phi_k\} = 1 \quad (5.21)$$

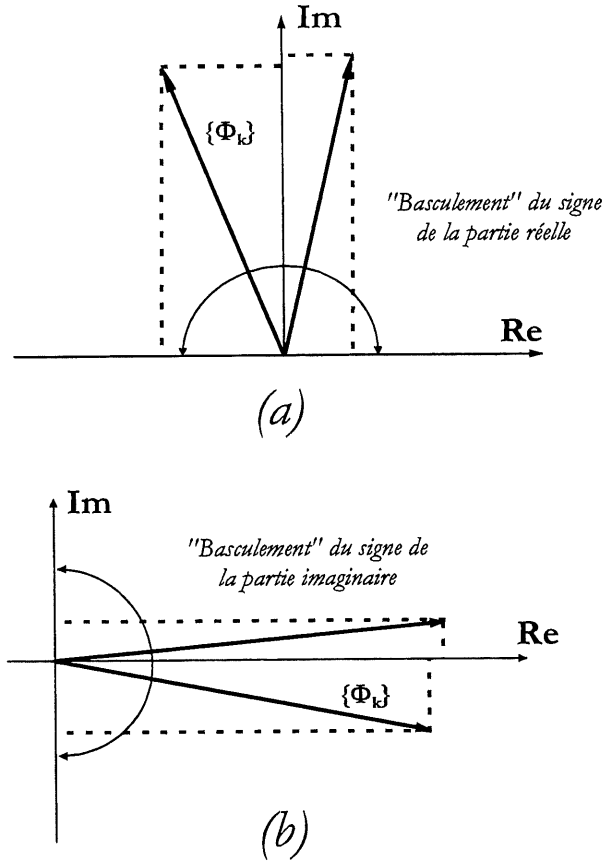


Figure 5.11: Vecteurs propres complexes: poids relatif des parties réelle et imaginaire, et variations des deux parties sous l'effet d'une modification des paramètres, abstraction faite de changements aléatoires de signes.

Suivant la norme, l'approximation des vecteurs propres n'est pas équivalente. On considère par exemple la première déformée d'une poutre simplement supportée. La poutre est orientée suivant l'axe z . Avec la norme infinie, la déformée analytique ϕ_1 montre une totale indépendance vis à vis des paramètres d'entrée (équation 5.22), alors que la norme massique introduit des variables

d'entrée dans l'amplitude (équation 5.23).

$$\phi_1 = \sin\left(\frac{z\pi}{L}\right) \quad (5.22)$$

$$\phi_1 = \sqrt{\frac{2}{m}} \sin\left(\frac{z\pi}{L}\right) \quad (5.23)$$

avec

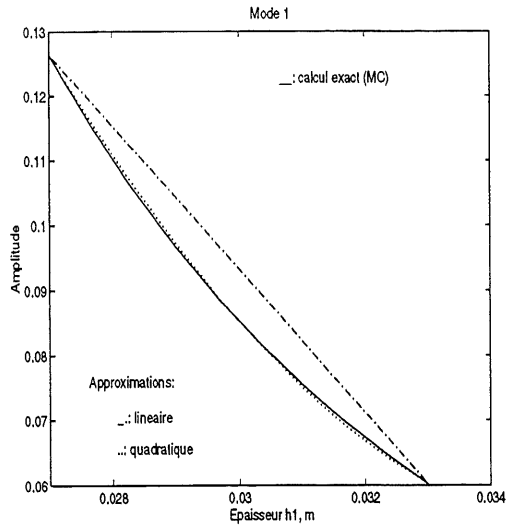
$$m \equiv m(\rho, h, w, L) \quad (5.24)$$

Dans cet exemple, la normalisation par rapport à la masse agirait défavorablement sur l'approximation linéaire. L'approximation de même degré des fréquences propres et des vecteurs propres n'est donc pas équivalente. L'auteur ne connaît pas de méthode qui permette de prédire quelle est la meilleure normalisation possible.

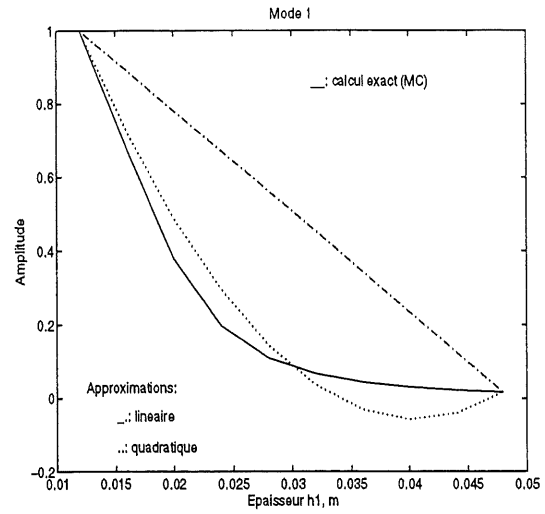
Qualité de l'approximation, étude avec une variable incertaine: afin de montrer simplement les caractéristiques de chaque approximation, linéaire et quadratique, on trace l'amplitude des trois premiers vecteurs propres du demi-portique au point d'application de la force excitatrice (figures 5.12 à 5.14). Les vecteurs propres sont normalisés par rapport à la masse. L'épaisseur h_1 est la seule variable incertaine. La valeur moyenne de h_1 étant de 30.0 mm, l'incertitude de 10% correspond à l'intervalle de variation 27.0 - 33.0 mm, et l'incertitude de 60% à l'intervalle 12.0 - 48.0 mm.

Les figures (5.12) à (5.14) montrent les points suivants:

- L'augmentation de l'ordre de l'approximation permet d'augmenter l'adéquation avec la courbe exacte. A la limite, un ordre très élevé garantirait l'adéquation parfaite (figure 5.15).
- Les formes des courbes sont très différentes d'un mode à l'autre. Pour le même paramètre d'entrée, l'approximation linéaire sous-estime le deuxième mode, mais surestime le premier et le troisième modes.
- L'approximation quadratique du premier mode introduit un changement de signe qui n'existe pas en réalité (région 35.0 - 45.0 mm). C'est un effet de bord que l'on n'aurait pas avec une approximation multilinéaire.

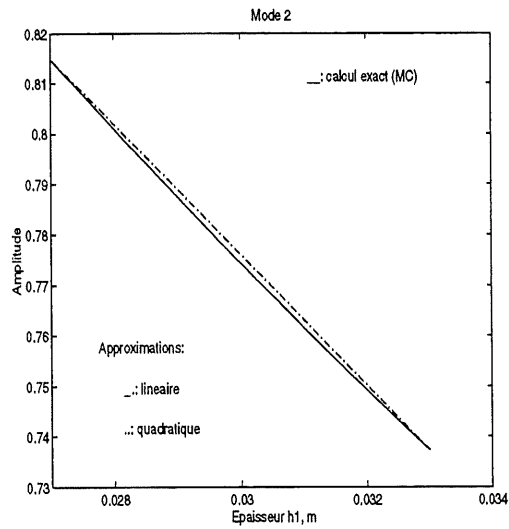


(a) $\Delta_{h_1} = 10\%$

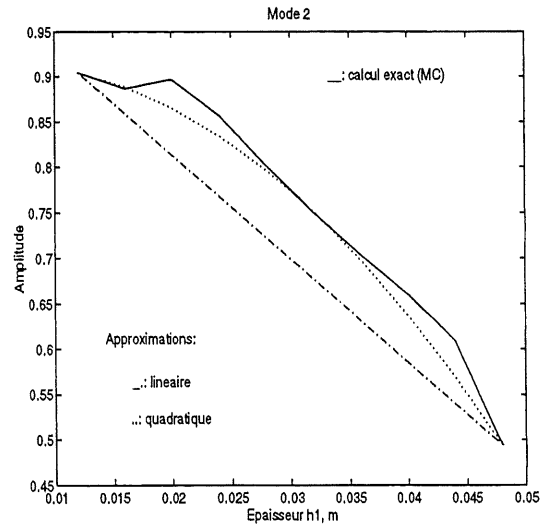


(b) $\Delta_{h_1} = 60\%$

Figure 5.12: Demi-portique: premier vecteur propre (au point d'application de la force) tracé en fonction de h_1 pour deux valeurs d'incertitude 10 et 60%.

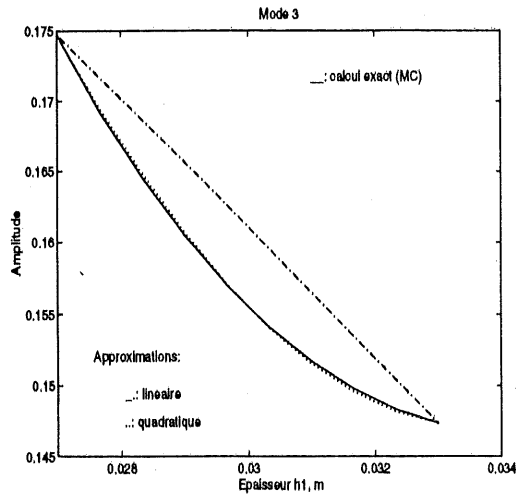


(a) $\Delta_{h_1} = 10\%$

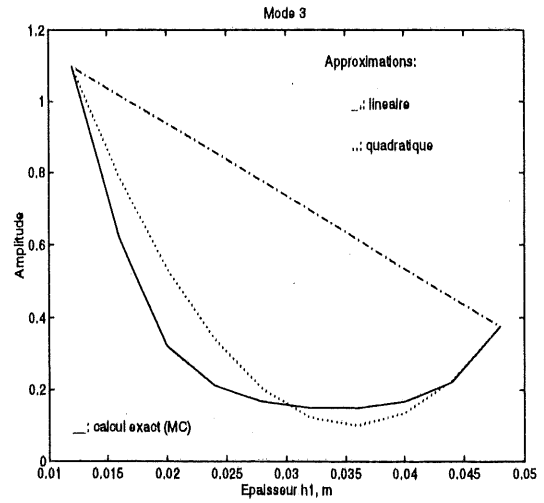


(b) $\Delta_{h_1} = 60\%$

Figure 5.13: Demi-portique: deuxième vecteur propre (au point d'application de la force) tracé en fonction de h_1 pour deux valeurs d'incertitude 10 et 60%.



(a) $\Delta_{h_1} = 10\%$



(b) $\Delta_{h_1} = 60\%$

Figure 5.14: Demi-portique: troisième vecteur propre (au point d'application de la force) tracé en fonction de h_1 pour deux valeurs d'incertitude 10 et 60%.

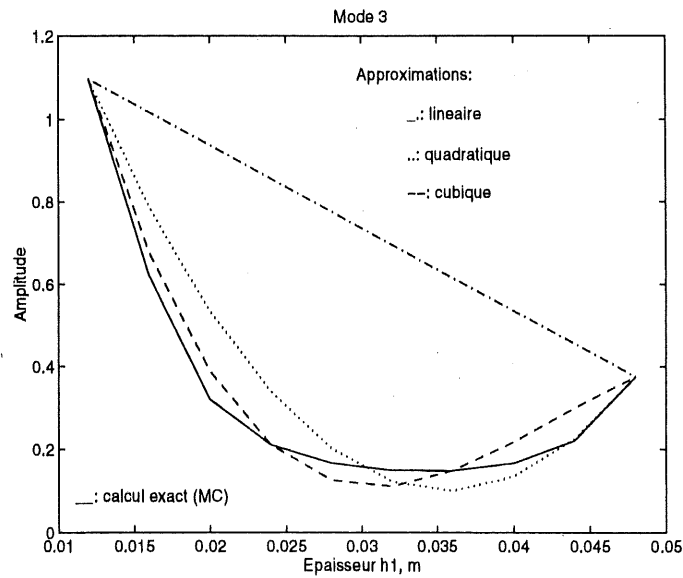


Figure 5.15: Demi-portique: troisième vecteur propre tracée en fonction de h_1 pour 60% d'incertitude. Approximation cubique.

Qualité de l'approximation, étude avec plusieurs variables: pour étudier la qualité globale de l'approximation du vecteur $\{\Phi\}_k$, l'indicateur MAC est approprié . Il est appliqué au vecteur exact $\{\Phi\}_k$ et à son approximation $\{\hat{\Phi}\}_k$. Cet indicateur intègre les erreurs spatiales locales et globales:

$$MAC_k = \frac{\{\hat{\Phi}_k\}^T \cdot \{\Phi_k\}}{\|\{\hat{\Phi}_k\}\|_2 \|\{\Phi_k\}\|_2} \quad (5.25)$$

Le résultat du calcul pour le mode k est un scalaire variant de 0 à 1. Les deux vecteurs sont identiques si leur MAC est égal à 1. Le MAC du mode k est calculé pour des combinaisons des paramètres n'ayant pas servi à calculer les coefficients d'approximation. La valeur la plus faible sert à définir l'indicateur de précision des valeurs propres:

$$\varepsilon_{\{\Phi_k\}} = \min MAC_k \quad (5.26)$$

Grâce à cet indicateur, on peut définir un palier à partir duquel on rejette l'approximation. Le palier permet de choisir l'approximation linéaire ou quadratique. A titre d'exemple, l'indicateur MAC est utilisé pour comparer les vecteurs propres exacts et approchés du treilli (tableaux 5.6 à 5.8). On observe les points suivants:

- L'approximation linéaire est insuffisante pour le mode 2 aux grandes incertitudes. L'approximation quadratique donne de très bon résultats globaux, et le couplage n'est pas justifié.
- L'augmentation du nombre de variables dégrade peu la précision.

Il faut noter que l'indicateur utilisé est peu discriminant, c'est-à-dire qu'il ne permet pas d'évaluer la qualité locale de la précision. La qualité locale peut être calculée avec un indicateur qui compare les déplacements de chaque degré de liberté, puis qui prend l'écart maximum.

Approximation \ Δ_{x_i}	Mode 1			Mode 2		
	10%	30%	60%	10%	30%	60%
Linéaire	1.000	0.999	0.997	0.990	0.966	0.856
Quadratique découplée	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998
Quadratique couplée	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998

Tableau 5.6: Treilli, trois variables incertaines: E_1 , ρ_1 et h_2 . Deux premiers vecteurs propres. Valeurs de l'indicateur en % pour des incertitudes croissantes.

Approximation \ Δ_{x_i}	Mode 1			Mode 2		
	10%	30%	60%	10%	30%	60%
Linéaire	1.000	0.999	0.995	0.983	0.789	0.543
Quadratique découplée	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
Quadratique couplée	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999

Tableau 5.7: Treilli, quatre variables incertaines: E_1 , ρ_1 , h_1 et h_2 . Deux premiers vecteurs propres. Valeurs de l'indicateur en % pour des incertitudes croissantes.

Approximation \ Δ_{x_i}	Mode 1			Mode 2		
	10%	30%	60%	10%	30%	60%
Linéaire	1.000	0.999	0.996	0.984	0.808	0.560
Quadratique découplée	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
Quadratique couplée	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999

Tableau 5.8: Treilli, cinq variables incertaines: E_1 , ρ_1 , h_1 , h_2 et η_1 . Deux premiers vecteurs propres. Valeurs de l'indicateur en % pour des incertitudes croissantes.

5.4 Prédiction de la réponse maximale

5.4.1 Introduction

Cette section fait l'étude comparative des résultats de l'énergie cinétique spécifique maximale avec les trois méthodes: Monté carlo, perturbations (d'ordres 1 et 2), et PMO (approximations d'ordres 1 et 2). On insiste peu sur la méthode de perturbations. On aborde les problèmes d'ordre théorique de la méthode PMO dans les premières sections (méthode directe, croisements de modes). Ensuite, on compare la précision des méthodes abstraction faite de la rapidité. La dernière section compare les temps de calcul des méthodes.

5.4.2 Méthode de projection directe

Information requise pour trouver l'énergie cinétique spécifique maximale: l'expression de l'énergie cinétique spécifique est composée essentiellement des vecteurs propres et des valeurs propres (hypothèse de masse peu influente). Ces termes permettent de calculer la participation dynamique et la coïncidence fréquentielle par projection de l'équation du mouvement dans la base modale. En raison de l'incompatibilité des approximations des vecteurs et des fréquences propres, il

est préférable de limiter l'utilisation des vecteurs propres approchés pour calculer l'énergie cinétique spécifique maximale. On approxime uniquement les fréquences propres et la valeur absolue de la participation dynamique (sans calcul intermédiaire des vecteurs propres approchés). Cette méthode est appelée "directe", par opposition à la méthode de projection complète. Elle exige un stockage réduit (coefficients des vecteurs propres inutiles). D'autre part, elle est beaucoup plus rapide que la méthode complète. Enfin, le problème du signe des vecteurs propres est totalement évité. On présente la méthode directe au paragraphe suivant.

Note importante: dans certains cas, il est intéressant de calculer aussi les approximations des vecteurs propres, car la méthode proposée n'est pas strictement limitée au calcul de l'énergie cinétique (extension possible aux déplacements, aux contraintes, etc...).

Méthode PMO directe: l'énergie cinétique spécifique maximale est calculée à l'issue du problème d'optimisation répété pour les M modes de la base modale (voir l'organigramme, chapitre 4 page 59). Le calcul rigoureux de l'énergie comprend les étapes suivantes:

- Pour chaque fréquence:
 - Pour chaque mode k :
 - * Calcul des paramètres qui répondent au problème d'optimisation à l'aide des fréquences propres approchées. Cette combinaison de paramètres est nommée \mathcal{E}_k et le point correspondant de Σ est nommé O_k (notations du chapitre 4).
 - * Calcul des matrices exactes de raideur et de masse pour les paramètres de \mathcal{E}_k .
 - * Projection des matrices de raideur et de masse exactes sur la base des modes propres approchés.
 - * Calcul de l'énergie cinétique spécifique pour \mathcal{E}_k . Comparaison des valeurs obtenues de l'énergie cinétique spécifique pour les modes déjà calculés. Sélection de la plus grande énergie spécifique.
 - Fin de la boucle des modes.
- Fin de la boucle en fréquence.

On voit que les paramètres des ensembles \mathcal{E}_k sont sélectionnés grâce aux fréquences propres approchées, alors que les projections des matrices de raideur et de masse utilisent uniquement les vecteurs propres approchés. Or l'approximation linéaire des vecteurs propres n'a pas le même degré de précision que l'approximation linéaire des fréquences propres, en raison de la normalisation des vecteurs entre autre. Il en résulte une fausse estimation de l'énergie cinétique spécifique maximale. Pour remédier à cette incohérence et pour réduire les calculs et le stockage, on forme directement les matrices projetées. Cette méthode est appelée méthode de projection directe, par opposition à la projection complète. Explicitement, on suppose que la matrice de masse projetée est la matrice identité, et que la matrice de raideur projetée contient les valeurs propres approchées calculées au point O_k :

$$[\tilde{K}] = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 & 0 & \dots \\ 0 & \hat{\lambda}_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

L'amortissement structural ne donne pas de difficulté majeure: si l'amortissement η est uniformément réparti sur la structure, on calcule l'approximation des valeurs propres en nombres réels, puis on les multiplie par le coefficient $(1 + j\eta)$. Si l'amortissement est réparti, on calcule l'approximation des valeurs propres en nombres complexes. Le problème d'optimisation est un peu modifié pour tenir compte du caractère complexe des fréquences propres. En particulier, les valeurs absolues deviennent des modules:

Maximiser:

$$|\Gamma_k| \quad (5.28)$$

sous les contraintes paramétriques:

$$x_{min_1} \leq x_1 \leq x_{max_1} \quad (5.29)$$

...

$$x_{min_n} \leq x_n \leq x_{max_n} \quad (5.30)$$

et sous la contrainte fréquentielle:

$$|\omega_k^2 - \omega^2| \text{ minimale} \quad (5.31)$$

Le calcul final de l'énergie cinétique spécifique dans la méthode directe est exécuté de la façon suivante: le vecteur des déplacements modaux vérifie l'équation (5.32), où $[\tilde{Z}]$ est la matrice d'impédance complexe directe (voir calcul ci-dessus).

$$[\tilde{Z}]\{q\} = \{\Gamma\} \quad (5.32)$$

avec

$$\{\Gamma\} = [\Phi]^T \{F\} \quad (5.33)$$

Si cette formulation était utilisée, il faudrait calculer les parties réelle et imaginaire approchées de la participation dynamique. Pour simplifier, accélérer et uniformiser les calculs, on préfère utiliser la valeur absolue de la participation dynamique uniquement (comme dans l'algorithme d'optimisation). Dans l'expression de l'énergie cinétique spécifique, le produit hermitien des déplacements modaux s'écrit sous la forme:

$$\{q\}^T \cdot \{q\}^* = \{\Gamma\}^T ([\tilde{Z}][\tilde{Z}]^*)^{-1} \{\Gamma\}^* \quad (5.34)$$

Comme la matrice d'impédance est diagonale (si la base des vecteurs propres est utilisée), l'équation s'écrit sous la forme développée suivante:

$$\{q\}^T \cdot \{q\}^* = \sum_{k=1}^M \frac{|\Gamma_k|^2}{(\omega_k^2 - \omega^2)((\omega_k^*)^2 - \omega^2)} \quad (5.35)$$

Cette forme fait apparaître la valeur absolue de la participation dynamique.

Amélioration de la précision avec la projection directe: d'après les figures (5.16) (a) et (5.16) (b), l'amélioration est sensible si l'incertitude des paramètres est assez grande. Les figures montrent que l'erreur se manifeste avant tout aux résonances, c'est à dire aux fréquences pour lesquelles les termes de la matrice d'impédance sont les plus sensibles. La méthode de projection complète sous-estime systématiquement la réponse. On explique ce résultat ainsi: la matrice d'impédance projetée sur la base des vecteurs propres approchés contient des valeurs propres approchées "faussées" (équation 5.36), alors que la matrice directe contient les valeurs propres

approchées "vraies" (équation 5.37). Les valeurs propres sont des nombres complexes.

$$[\tilde{Z}_f] = \begin{pmatrix} \hat{\omega}_{1,fausse}^2 - \omega^2 & 0 & \dots \\ 0 & \hat{\omega}_{2,fausse}^2 - \omega^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

$$[\tilde{Z}_v] = \begin{pmatrix} \hat{\omega}_{1,vraie}^2 - \omega^2 & 0 & \dots \\ 0 & \hat{\omega}_{2,vraie}^2 - \omega^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

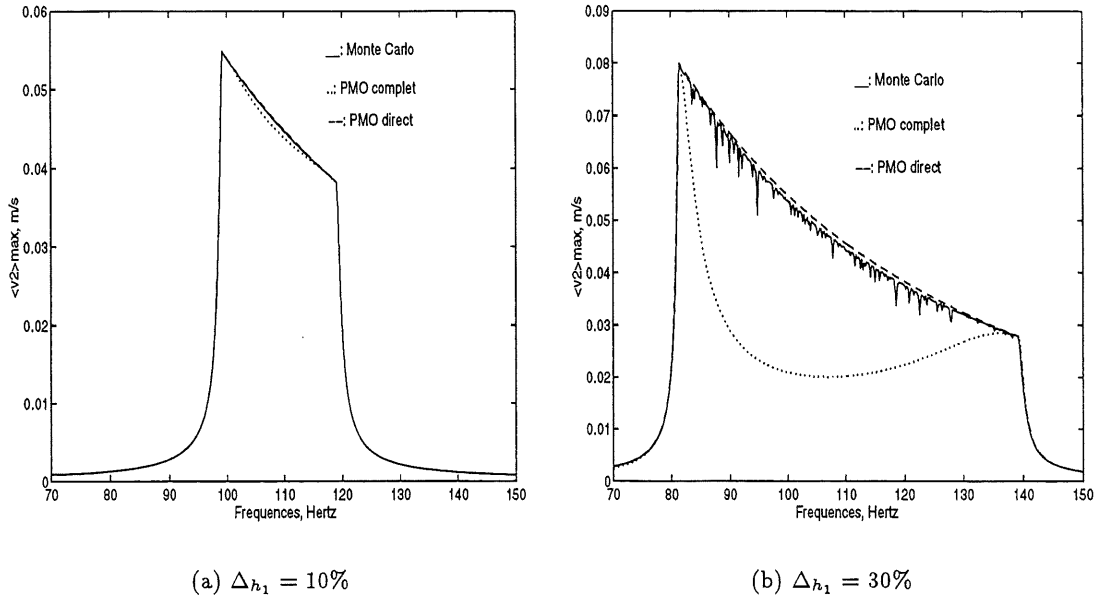


Figure 5.16: Demi-portique: énergie cinétique spécifique maximale tracée en fonction de h_1 au voisinage du mode 2 isolé, pour deux valeurs d'incertitude 10 et 30%. La méthode de Monté Carlo n'a pas totalement convergé en (b).

Au voisinage de la résonance d'ordre k , l'algorithme d'optimisation tente de trouver les paramètres qui vérifient la relation (5.38). Par conséquent, la partie réelle du terme diagonal (k, k) de $[\tilde{Z}_v]$ s'annule, alors que celle de $[\tilde{Z}_f]$ reste strictement positive ou strictement négative. L'énergie cinétique spécifique maximale résultant du calcul du déplacement modal avec $[\tilde{Z}_f]$ est donc plus

faible que l'énergie cinétique spécifique maximale "vraie" (calculée avec $[\tilde{Z}_v]$).

$$|\hat{\omega}_{k,vraie}| = \omega \quad (5.38)$$

5.4.3 Croisements de modes

Introduction: le lecteur est prié de lire l'avertissement au début du rapport concernant le terme de "croisement de modes". Le croisement de modes est dû à la variation des valeurs propres de la structure sous l'effet des variations des paramètres d'entrée (paramètres incertains). La possibilité de croisement est d'autant plus forte que l'intervalle des paramètres est grand (voir la figure 5.17), et il existe un intervalle minimal des paramètres qui assure que deux modes successifs ne se croisent pas. L'intervalle minimal dépend des modes concernés et de la valeur moyenne des paramètres.

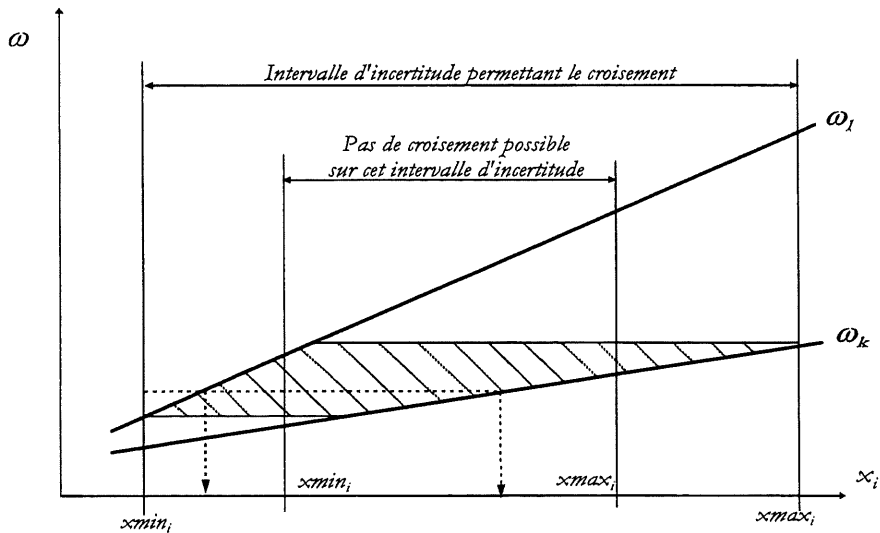


Figure 5.17: Effet de la largeur de l'intervalle d'incertitude sur la possibilité de croisement des modes l et k . Les hachures indiquent la zone de croisement. Sur cette figure, on suppose que les fréquences propres ont un comportement linéaire. On utilise une seule variable x_i en abscisse pour simplifier.

Effet du croisement sur l'énergie cinétique spécifique: le croisement des modes ω_k et ω_l ($l \neq k$) perturbe les résultats des méthodes de prédiction. Au voisinage du mode k ($\omega \simeq \omega_k$), l'énergie cinétique spécifique montre un maximum pour une combinaison \mathcal{E}_k des paramètres vérifiant la relation (5.39). Au voisinage du mode l ($\omega \simeq \omega_l$), l'énergie cinétique spécifique montre un maximum pour une combinaison \mathcal{E}_l des paramètres vérifiant la relation (5.40).

$$|\omega_k| = \omega \quad (5.39)$$

$$|\omega_l| = \omega \quad (5.40)$$

Par conséquent, le croisement des modes k et l implique que l'énergie cinétique spécifique a deux maxima locaux dans l'espace Ω_{n+1} au voisinage de la résonance ($\omega \simeq \omega_k$). En particulier, les maxima locaux sont confondus si les modes sont dégénérés.

La méthode PMO résout le problème directement: elle départage les deux maxima grâce au terme de participation dynamique. En revanche, la méthode de perturbations ne peut rendre compte de la présence de maxima multiples puisqu'elle s'appuie sur le développement de Taylor de l'énergie autour d'un point unique. La méthode de Monté Carlo montre des difficultés à converger vers le bon maximum, en raison de la différence d'acuité des pics d'énergie dans Ω_{n+1} .

Etude théorique du croisement et résultats: on peut étudier certaines propriétés du croisement de modes en décomposant l'expression de l'énergie cinétique spécifique. Pour simplifier, l'énergie cinétique spécifique est donnée par le mode 1 de fréquence propre ω_1 et le mode 2 de fréquence propre ω_2 . Les autres modes sont suffisamment éloignés pour ne pas influencer la réponse. On suppose que la fréquence d'excitation ω ne permet pas le croisement des modes 1 et 2 alors que $\omega + \Delta\omega$ est une fréquence pour laquelle le croisement est possible (voir figure 5.18). De plus, on suppose que c'est le mode 1 qui donne le maximum de l'énergie cinétique spécifique à la fréquence d'excitation ω . Pour un amortissement structural uniforme, l'énergie cinétique spécifique vérifie l'équation (5.41).

$$\langle v^2(\omega) \rangle \simeq \frac{\omega^2}{2m} \left\{ \frac{\Gamma_1^2}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + \eta^2 \omega_1^4} + \frac{\Gamma_2^2}{(\omega^2 - \omega_2^2)^2 + \eta^2 \omega_2^4} \right\} \quad (5.41)$$

Avant le croisement, un seul point O_1 de l'espace des paramètres donne l'énergie cinétique

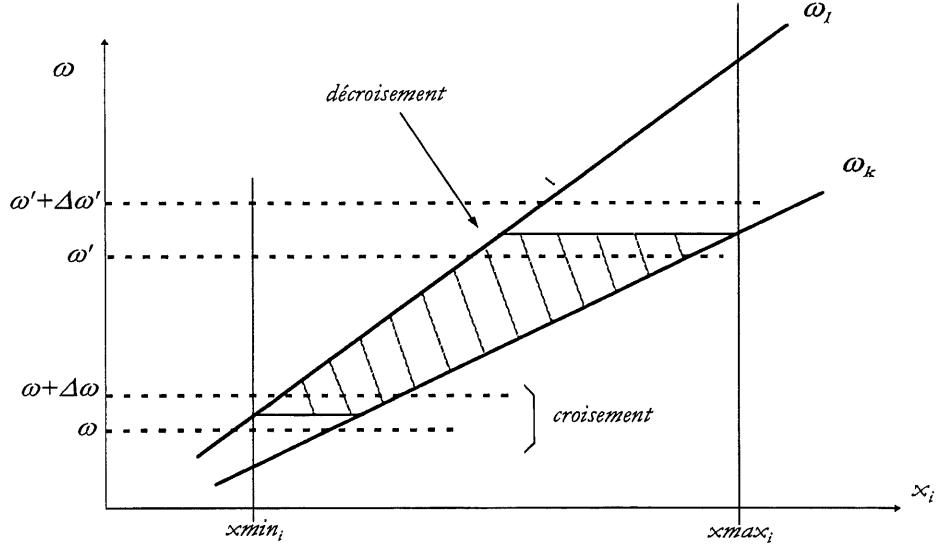


Figure 5.18: Croisement et décroisement des modes k et l . On utilise une seule variable x_i en abscisse pour simplifier. Les hachures indiquent la zone de croisement pour cet intervalle d'incertitude.

spécifique maximale. Les paramètres correspondants vérifient $\omega = \omega_1$. L'énergie cinétique spécifique en O_1 vérifie:

$$\langle v^2(\omega) \rangle \simeq \frac{1}{2m(O_1)} \left(\frac{\Gamma_1(O_1)}{\eta\omega} \right)^2 \quad (5.42)$$

Après le croisement, deux points O_1 et O_2 donnent la coïncidence fréquentielle, c'est à dire $\omega + \Delta\omega = \omega_1$ et $\omega + \Delta\omega = \omega_2$. On suppose que O_1 donne encore l'énergie cinétique spécifique maximale parce que la participation dynamique $\Gamma_1(O_1)^2$ est la plus élevée. Par conséquent, l'énergie cinétique spécifique maximale vérifie en O_1 :

$$\langle v^2(\omega + \Delta\omega) \rangle \simeq \frac{1}{2m(O_1)} \left(\frac{\sqrt{\Gamma_1(O_1)^2 + \Gamma_2(O_1)^2}}{\eta(\omega + \Delta\omega)} \right) \quad (5.43)$$

L'instant du croisement s'obtient pour $\Delta\omega \rightarrow 0$. L'équation (5.43) traduit une variation positive de l'énergie cinétique spécifique maximale, par enrichissement progressif de la participation dynamique.

On montre de la même façon que le décroisement des fréquences propres provoque une diminution

positive ou nulle de l'énergie. Les instants de croisement et décroisement dépendent de l'intervalle d'incertitude des paramètres et de la fréquence d'excitation. On a mis en évidence le phénomène de croisement des trois premiers modes du demi-portique sur les figures (5.19) (a) à (5.19) (d) pour des incertitudes croissantes. La seule variable incertaine est l'épaisseur h_1 . On note en particulier la parfaite cohérence entre la simulation de Monté Carlo et la méthode PMO. On reconnaît aussi l'allure de "dents de scies" caractéristique des croisements.

5.4.4 Comparaisons des prédictions avec les méthodes de Monté Carlo, de perturbations et PMO

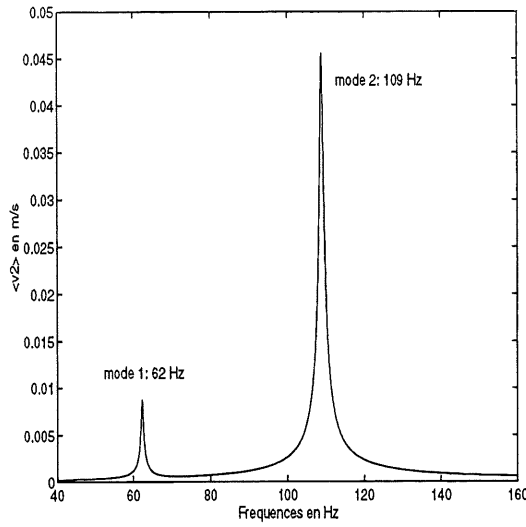
Méthodologie: cette section compare la précision des méthodes de perturbations (linéaire et quadratique découplée), de Monté Carlo et PMO (linéaire et quadratique découplée). Les énergies cinétiques spécifiques maximales sont notées de la façon suivante:

- Méthode de Monté Carlo: $\langle v_{max}^2(\omega) \rangle_{MC}$
- Méthode de perturbations d'ordre 1: $\langle v_{max}^2(\omega) \rangle_{P1}$
- Méthode de perturbations d'ordre 2: $\langle v_{max}^2(\omega) \rangle_{P2}$
- Méthode PMO d'ordre 1: $\langle v_{max}^2(\omega) \rangle_{PMO1}$
- Méthode PMO d'ordre 2: $\langle v_{max}^2(\omega) \rangle_{PMO2}$

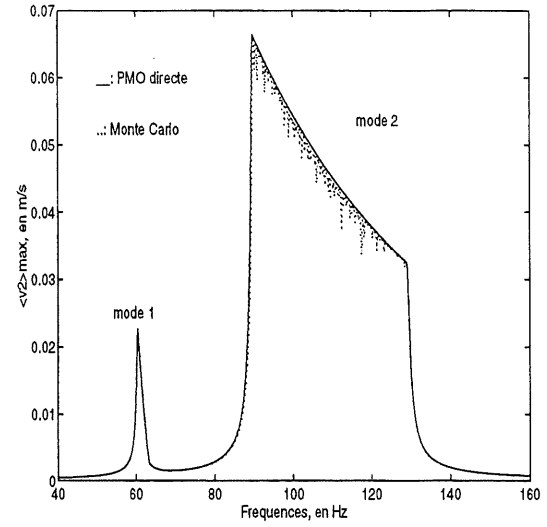
On trace les énergies cinétiques spécifiques maximales en fonction de la fréquence pour des incertitudes croissantes. On définit aussi un indicateur de la précision relative de l'énergie maximale à la fréquence d'excitation ω . La référence est donnée par la méthode de Monté Carlo. L'erreur relative de la méthode Y par rapport à la méthode de Monté Carlo est donnée par la relation suivante:

$$\varepsilon_{\langle v_{max}^2(\omega) \rangle_Y} = \frac{\langle v_{max}^2(\omega) \rangle_Y - \langle v_{max}^2(\omega) \rangle_{MC}}{\langle v_{max}^2(\omega) \rangle_{MC}} \quad (5.44)$$

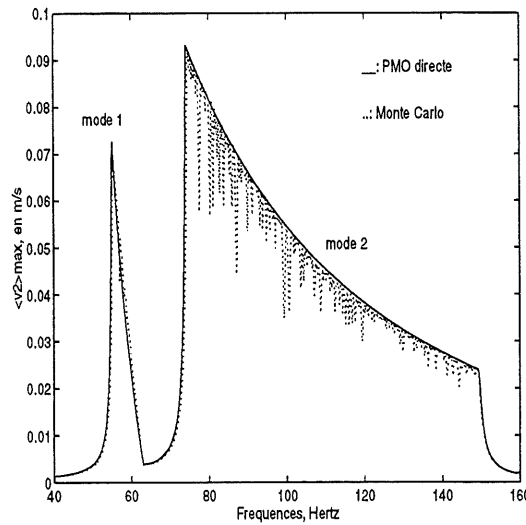
La bande des fréquences d'excitation sont choisies pour montrer les défauts des 3 méthodes. Le test le plus exigeant consiste à exciter la structure au voisinage des fréquences propres moyennes, car la sensibilité de la réponse y est très élevée.



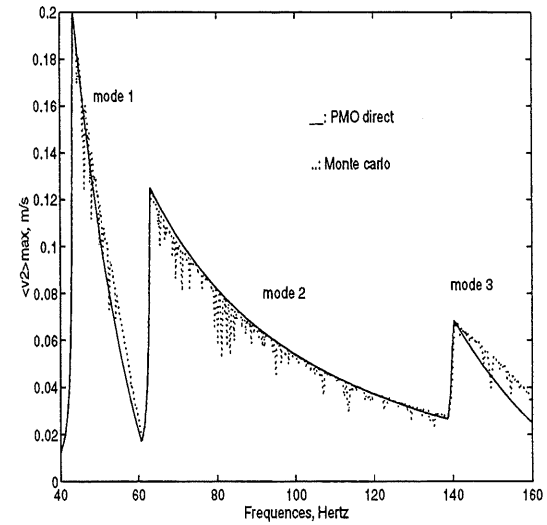
(a) $\Delta_{h_1} = 0\%$



(b) $\Delta_{h_1} = 20\%$



(c) $\Delta_{h_1} = 40\%$



(d) $\Delta_{h_1} = 60\%$

Figure 5.19: Demi-portique: énergie cinétique spécifique tracée en fonction de h_1 de 40 à 160 Hz, pour 0%, 20%, 40% et 60% d'incertitude. La méthode de Monté Carlo n'a pas encore convergé.

Insuffisance de la méthode de perturbations: la méthode de perturbations est présentée dans le but de montrer et de comprendre ses faiblesses. Pour cela, on a simulé la réponse maximale de

l'énergie cinétique spécifique avec la règle de Tchebytchev. La figure (5.20) montre l'approximation du maximum de l'énergie cinétique spécifique, comparé au maximum donné par la méthode PMO, pour le demi-portique (1 seule variable incertaine). On constate que l'incertitude doit rester très faible (inférieure à 2% dans ce cas) pour que l'estimation de la méthode de perturbations soit correcte. Au delà de 2%, la méthode de perturbations ne permet pas de prédire l'énergie cinétique spécifique maximale. Les simulations montrent que le terme le plus incorrect est l'estimation de l'écart type de la réponse (l'écart type est utilisé dans la règle de Tchebytchev pour calculer le maximum), et non l'estimation de la moyenne.

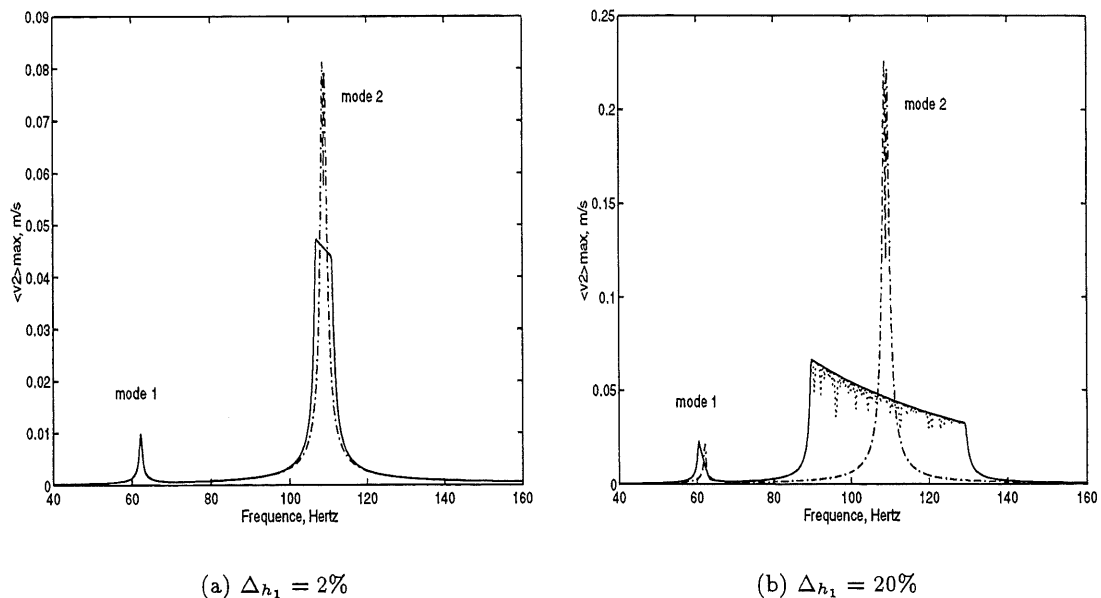


Figure 5.20: Demi-portique: énergie cinétique spécifique maximale pour 2% et 20% d'incertitude. —: PMO linéaire, --: Perturbations (ordre 1), ...: Monté Carlo (référence).

Les simulations montrent aussi que la méthode de perturbations d'ordre 2 ne donne pas de meilleurs résultats au voisinage de la résonance que la méthode d'ordre 1. Les ordres plus élevés ne donnent pas d'amélioration importante car l'approximation de Taylor converge très lentement vers la forme réelle de la réponse. Hors des résonances, les méthodes de perturbations sont relativement efficaces, même à des niveaux d'incertitude importants. L'intérêt de ces zones de fréquence est limité cependant.

Enfin, la qualité du développement de Taylor dépend beaucoup de l'amortissement, ce qui n'est pas le cas de la méthode PMO (l'amortissement est inclu dans la formulation). On peut l'expliquer assez facilement: dans l'espace des paramètres, l'énergie cinétique spécifique atteint ses maxima pour les combinaisons des variables qui permettent la résonance (si possible). Or il est connu que l'acuité des maxima est moins grande si l'amortissement est fort. Par conséquent, à incertitudes égales, le développement de Taylor de l'énergie est de meilleure qualité aux grands amortissements (0.1 et plus) qu'aux petits amortissements (0.05 et moins), du fait même de la moindre variabilité de la fonction à approcher. Les figures (5.21) (a) et (5.21) (b) montrent un cas d'amortissement faible (0.01) et un cas d'amortissement fort (0.2) pour 20% d'incertitude. Le demi-portique est le modèle utilisé et l'amortissement structural est uniforme sur la structure. En pratique, certaines structures traitées avec des matériaux absorbants de type viscoélastique peuvent avoir un amortissement global élevé, ce qui peut justifier l'utilisation de la méthode de perturbations. Toutefois, l'auteur met en garde contre les points suivants:

- Il n'existe pas de critère permettant de fixer le seuil minimal d'amortissement qui autorise l'emploi des perturbations. Par conséquent, la méthode n'est pas robuste.
- Le croisement des modes n'est pas pris en compte par la méthode de perturbations, que l'amortissement soit fort ou faible.
- L'amortissement a pour effet de *masquer* les insuffisances de la méthode de perturbations, et non de les éliminer.

Influence de l'ordre d'approximation dans la méthode PMO (demi-portique): cette partie montre qu'il n'existe pas de relation directe entre l'ordre d'approximation des modes propres et l'estimation de l'énergie cinétique spécifique maximale. Pour exposer ce résultat, on considère l'erreur relative de l'énergie cinétique spécifique maximale par rapport à la méthode de Monté Carlo: figures (5.22) (a) et (5.22) (b) pour $\Delta_{h_1} = 10\%$ d'incertitude, et figures (5.23) (a) et (5.23) (b) pour $\Delta_{h_1} = 60\%$ d'incertitude. Certains pics qui apparaissent sans raison sont dus à un décalage spectral entre les méthodes PMO et MC.

On peut observer que la réduction d'erreur due à l'approximation quadratique est assez faible, aussi bien à 10% qu'à 60%. D'autre part, elle est effective pour le mode 2 seulement (entre 80 et

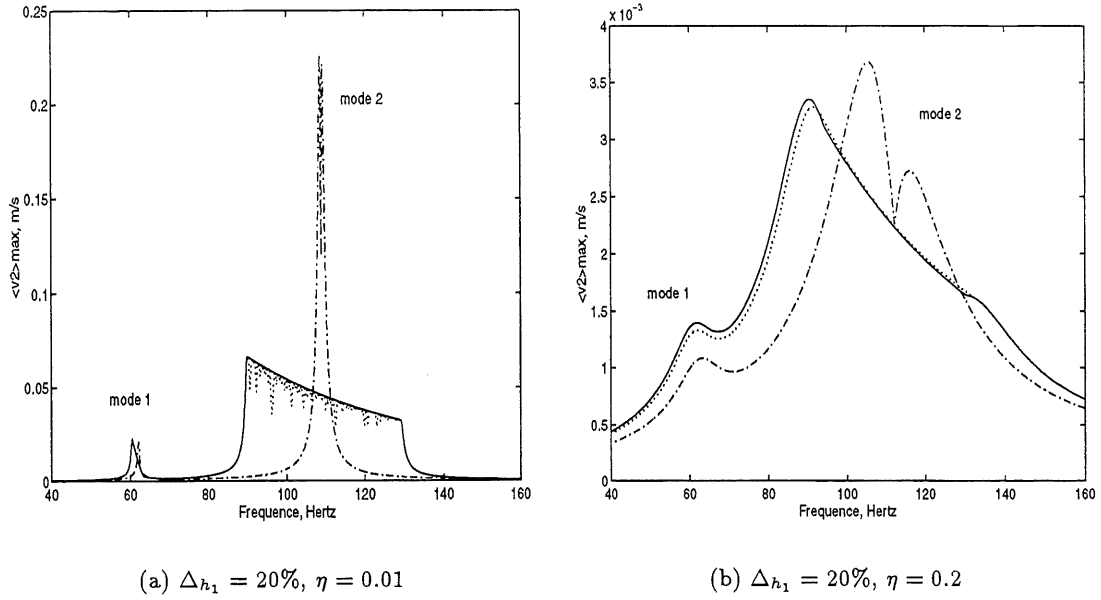
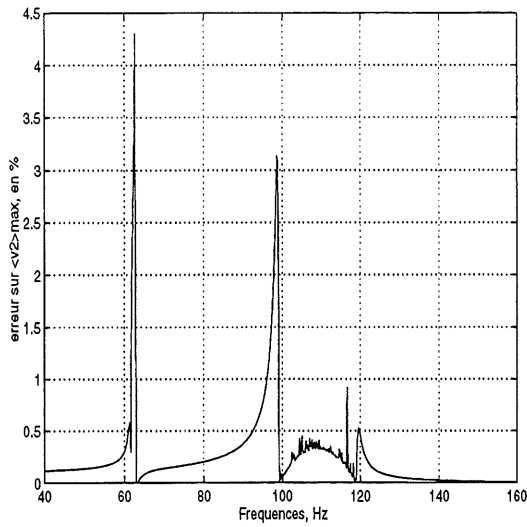
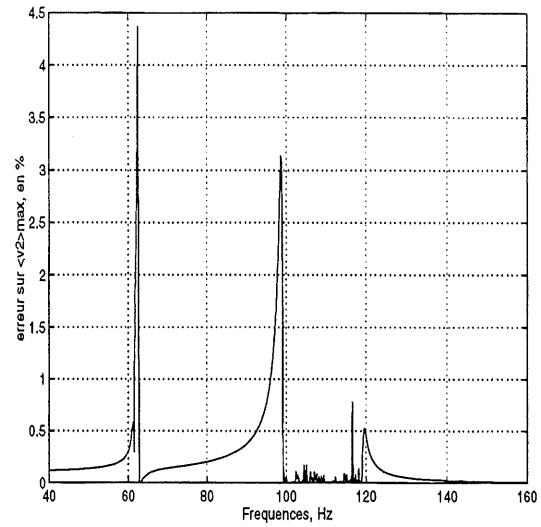


Figure 5.21: Demi-portique: énergie cinétique spécifique maximale pour 20% d'incertitude et deux valeurs d'amortissement structural: 0.01 et 0.2. —: PMO linéaire, - -: Perturbations (ordre 1), ...: Monté Carlo (référence).

120 *Hz* environ), ce qui est logique puisque ce mode est très bien approximé. La dégradation de la précision avec l'augmentation de l'ordre est même possible (mode 3, 160 *Hz* environ, à 60% d'incertitude). On peut expliquer ce résultat contradictoire grâce aux figures (5.24) (a) et (5.24) (b). La figure (5.24) (a) représente la fréquence propre du mode 3 et la figure (5.24) (b) montre la participation dynamique de ce mode. Le mode 3 est le seul mode à contribuer à l'énergie cinétique spécifique maximale vers 160 *Hz*. En traçant la droite d'équation $y = 160\text{Hz}$ sur la figure (5.24) (a), on obtient les trois valeurs de h_1 correspondant à l'approximation linéaire, l'approximation quadratique et au calcul exact. En reportant ces valeurs à la figure (5.24) (b), on constate que l'approximation linéaire de la participation dynamique est plus près de la participation dynamique exacte que ne l'est l'approximation quadratique. Comme l'amplitude de l'énergie cinétique spécifique maximale est essentiellement réglée par la valeur de la participation dynamique (voir chapitre 4), on déduit que l'approximation quadratique de l'énergie est moins bonne que l'approximation linéaire à cette fréquence. *La cause principale d'erreur est la faible courbure des fonctions approchées dans cette zone de fréquences.* L'exemple montre à quel point la relation

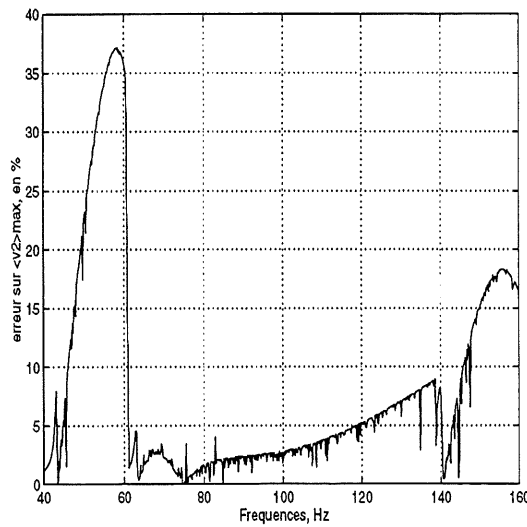


(a) PMO linéaire

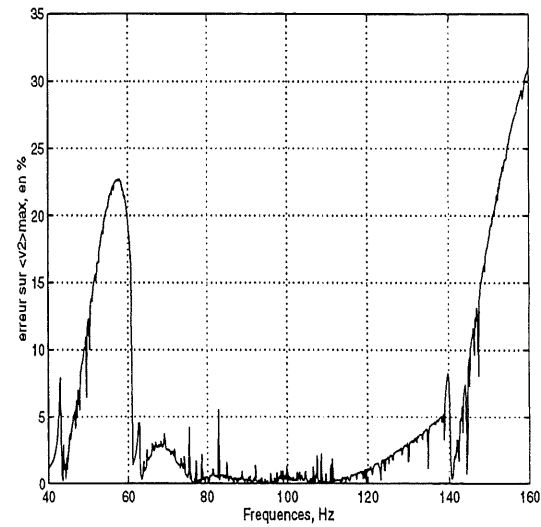


(b) PMO quadratique

Figure 5.22: Demi-portique: erreur relative $\varepsilon_{\langle v_{max}^2(\omega) \rangle_{PMO}}$ tracée de 40 à 160 Hz pour 10% d'incertitude. Les pics à 60 et 100 Hz sont dus au faible décalage spectral des méthodes de Monté Carlo et PMO.



(a) PMO linéaire



(b) PMO quadratique

Figure 5.23: Demi-portique: erreur relative $\varepsilon_{\langle v_{max}^2(\omega) \rangle_{PMO}}$ tracée de 40 à 160 Hz pour 60% d'incertitude.

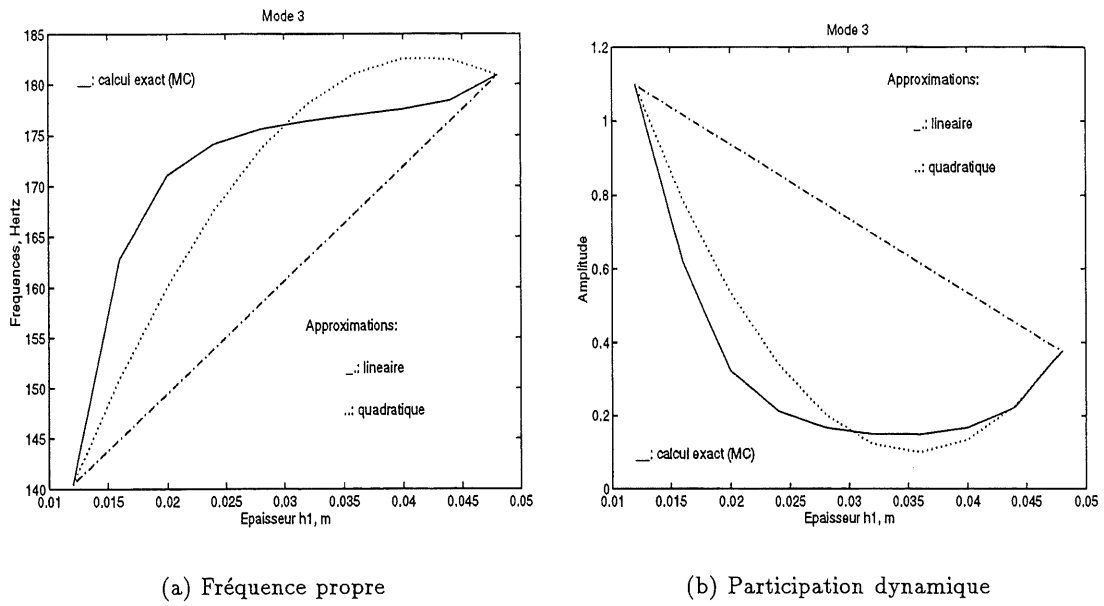


Figure 5.24: Demi-portique: participation dynamique (valeur absolue) et fréquence propre du mode 3 pour 60% d'incertitude. Influence des approximations des vecteurs propres et fréquences propres sur l'énergie cinétique spécifique maximale.

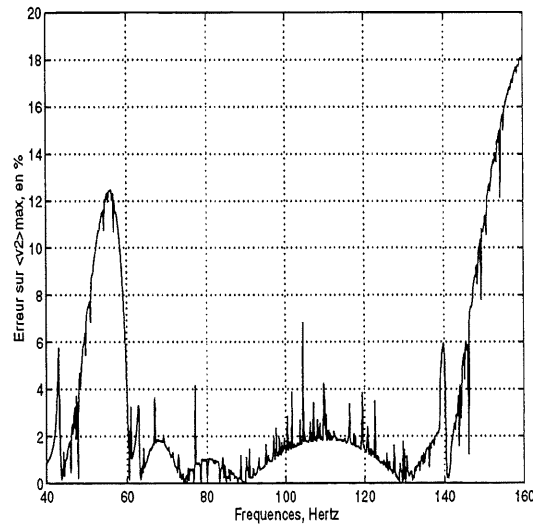


Figure 5.25: Demi-portique: erreur relative $\varepsilon_{\langle v_{max}^2(\omega) \rangle_{PMO}}$ tracée de 40 à 160 Hz pour 60% d'incertitude. Approximation cubique.

degré/précision est ambiguë. L'erreur obtenue avec l'approximation cubique est donnée à titre d'information (figure 5.25). Par rapport à la figure (5.23), on voit une baisse sensible de l'erreur pour le mode 1, mais une augmentation pour le mode 2. Le mode 3 reste au niveau atteint par l'approximation linéaire.

Validation de la méthode PMO pour un grand nombre de variables (treilli): la difficulté majeure de la validation vient de la lenteur de la méthode de Monté Carlo. Le nombre de simulations nécessaires à la convergence est très grand. D'autre part il est inconnu. Pour cette raison, le nombre de simulations réellement effectuées est inférieur au nombre de simulations théoriquement nécessaires. Dans les travaux de maîtrise, on a fixé quelques règles cohérentes pour permettre d'obtenir des résultats en un temps raisonnable:

- Incertitude constante, nombre de variables croissant: lorsque le nombre de variables augmente, il vaut mieux considérer *la densité des points d'échantillonnage* et non le nombre de tirages par variable. Par exemple: on constate qu'il faut 500 essais pour converger avec 1 variable. Pour 2 variables, il faut donc 30 à 50 essais ou plus par variable, et non 500 essais par variable.
- Incertitude croissante, nombre de variables constant: plus l'intervalle d'incertitude des variables est grand, plus le nombre de simulations est grand (si on souhaite préserver la densité des points d'échantillonnage dans l'espace des paramètres). Doubler l'intervalle d'incertitude de chaque variable revient à multiplier le nombre total de points d'échantillonnage par 2^n (n : nombre de variables incertaines). Cette contrainte n'est pas réalisable pour des incertitudes élevées.

Le tableau (5.9) donne une idée du nombre moyen de simulations effectuées pour des incertitudes variant entre 10% et 60%.

Le treilli est utilisé pour l'étude comparative des méthodes de prédiction. La figure (5.26) donne l'énergie cinétique de cette structure pour les trois premiers modes et pour les valeurs moyennes des paramètres. Sur les figures (5.27), (5.28) et (5.29) on a comparé les estimations de l'énergie cinétique maximale du treilli pour les méthodes de Monté carlo (référence), PMO linéaire et Perturbations d'ordre 1. Les méthodes d'ordres supérieurs PMO2 et P2 souffrent de problèmes numériques qui rendent les résultats inexploitable pour le moment. Trois niveaux d'incertitude des paramètres

Nombre de variables	Simulations effectuées	Nombre de points par variable
1	500	500
2	$\approx 2.0 \cdot 10^4$	150
3	$\approx 10^5$	47
4	$\approx 10^5$	18
5	$\approx 2.5 \cdot 10^5$	12

Tableau 5.9: Nombre moyen de simulations effectuées pour des incertitudes variant entre 10% et 60%, méthode de Monté Carlo.

d'entrée ont été retenus: 10%, 30% et 60%. Pour chaque niveau, on a tracé les estimations obtenues pour 2, 3, 4 et 5 variables incertaines.

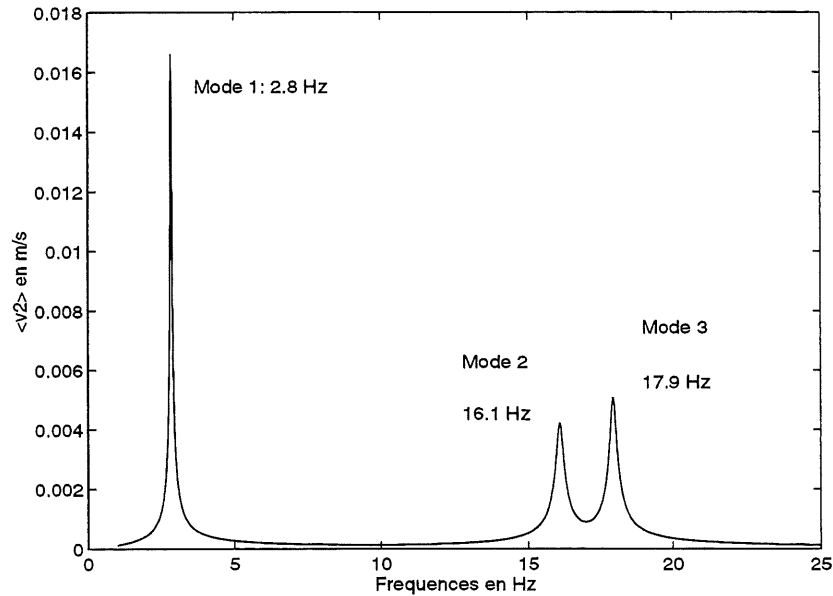


Figure 5.26: Treilli, énergie cinétique spécifique aux paramètres moyens.

On observe que la méthode PMO linéaire donne des résultats comparables aux résultats de la méthode de Monté Carlo pour 10%, 30% et 60% d'incertitudes, tandis que la méthode de perturbations surestime ou sous-estime la réponse maximale de façon systématique. Toutefois, quelques différences sensibles entre Monté Carlo et PMO apparaissent lorsque le nombre de variables ou l'incertitude augmentent. Deux raisons expliquent ces différences: d'une part, il est possible que la méthode de Monté Carlo n'ait pas encore convergé aux figures (5.28) (c) et (5.28) (d), de même

qu'aux figures (5.29) (c) et (5.29) (d), car le nombre de points de simulations est insuffisant. D'autre part, l'approximation linéaire est inadaptée aux trop grandes incertitudes, et une approximation d'ordre supérieur serait souhaitable (à condition que les techniques de programmation quadratique soient robustes pour ce type de problème). Dans le cadre particulier de l'étude, les figures montrent aussi que certaines hypothèses simplificatrices concernant la nouvelle méthode sont valides:

- L'effet de la masse est supposé négligeable dans l'approximation des vecteurs propres et des valeurs propres. La cohérence des résultats des méthodes PMO et de Monté Carlo (qui inclut l'effet de la masse) permet de valider l'hypothèse.
- L'effet de la participation dynamique dans le processus de sélection du maximum est supposé négligeable si aucune combinaison de paramètres ne permet de forcer la résonance d'un mode donné (cf. page 63). Cette supposition permet de simplifier l'algorithme. Ici encore, la cohérence des résultats des méthodes PMO et de Monté Carlo permet de valider l'hypothèse.

5.4.5 Comparaison des temps de calcul des trois méthodes

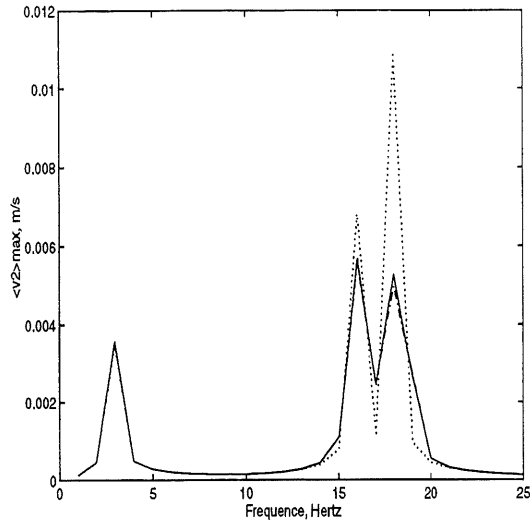
Introduction: cette section analyse les temps de calcul des trois méthodes. On rappelle les méthodes utilisées dans le mémoire:

- La méthode de Monté Carlo simple.
- La méthode de perturbations linéaire.
- La méthode de recherche des points modaux optimaux par approximation linéaire des vecteurs et valeurs propres, avec calcul direct de la matrice d'impédance modale pour le calcul de l'énergie cinétique spécifique maximale.

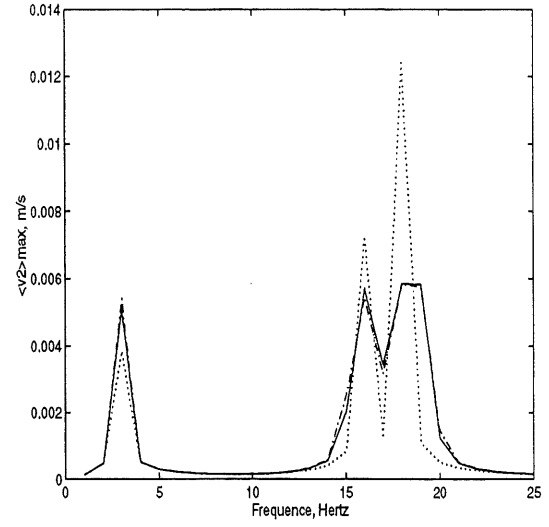
On évalue aussi le temps de calcul des méthodes de perturbations quadratique (P2) et PMO quadratique (PMO2). Cependant, ces deux dernières méthodes ne donnent pas de résultats satisfaisants, compte tenu du coût numérique et de la précision obtenus.

Analyse théorique: pour comparer les méthodes, on définit les nombres suivants:

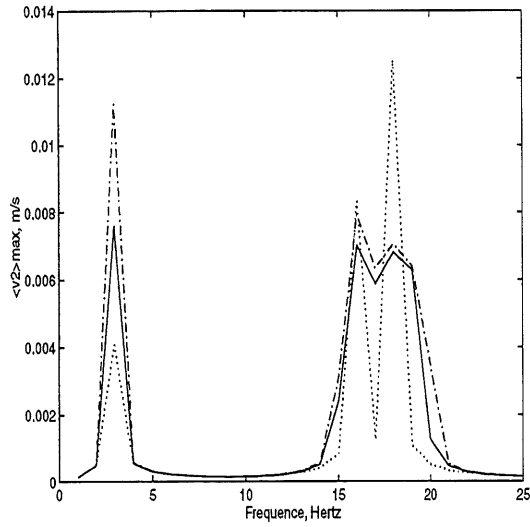
- n_f : nombre de fréquences d'excitation



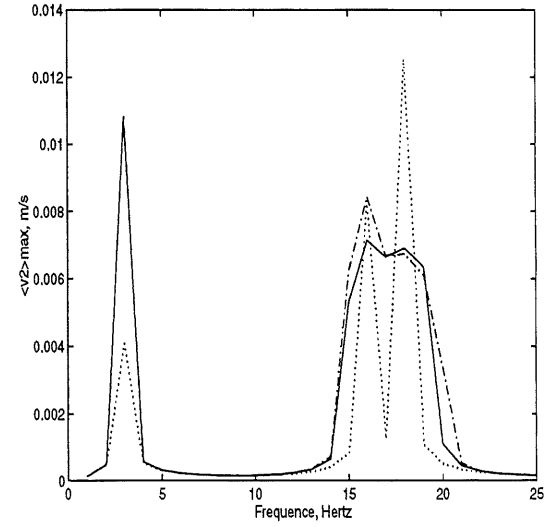
(a) 2 variables: E_1, h_2



(b) 3 variables: E_1, h_2, ρ_1

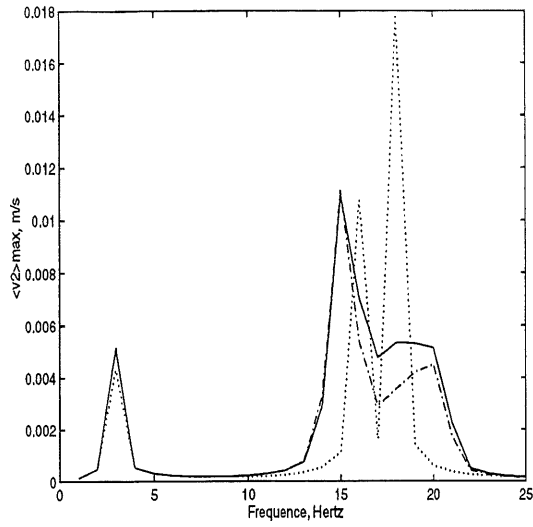


(c) 4 variables: E_1, h_2, ρ_1, h_1

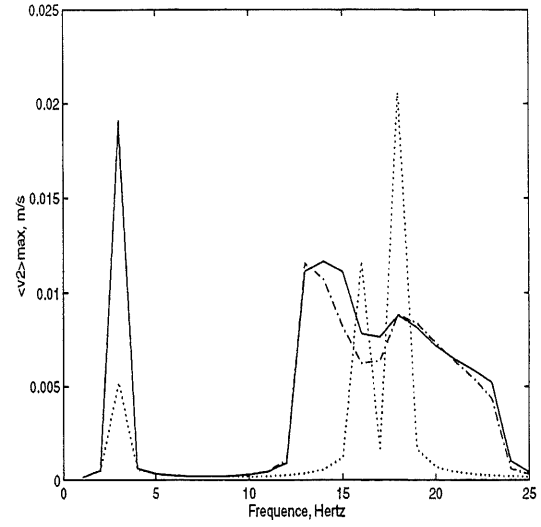


(d) 5 variables: E_1, h_2, ρ_1, h_1 et η_1

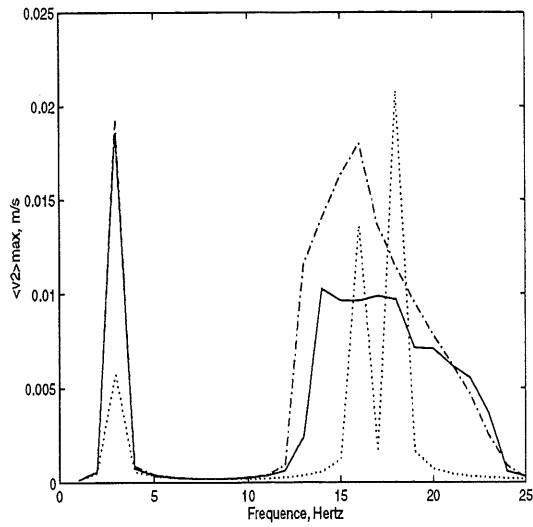
Figure 5.27: Treilli, 10% d'incertitude: comparaison des énergies cinétiques spécifiques maximales. —: méthode de Monté Carlo, - - : méthode PMO linéaire, ··· : méthode de perturbations (ordre 1).



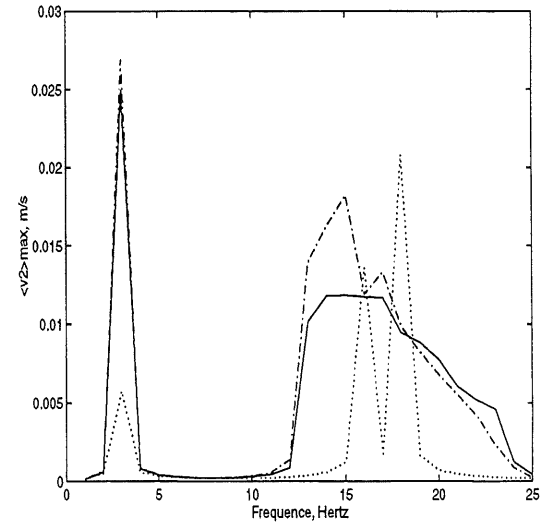
(a) 2 variables: E_1, h_2



(b) 3 variables: E_1, h_2, ρ_1

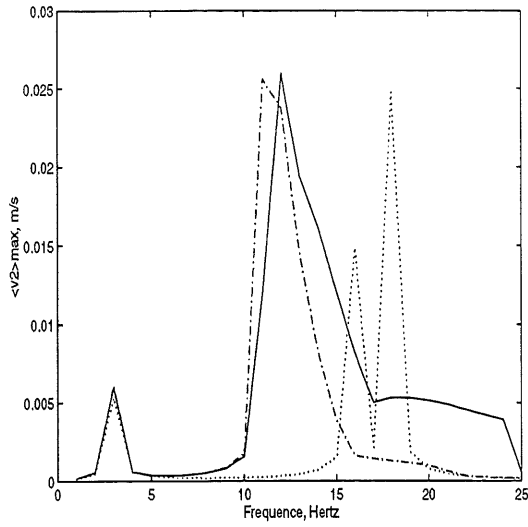


(c) 4 variables: E_1, h_2, ρ_1, h_1

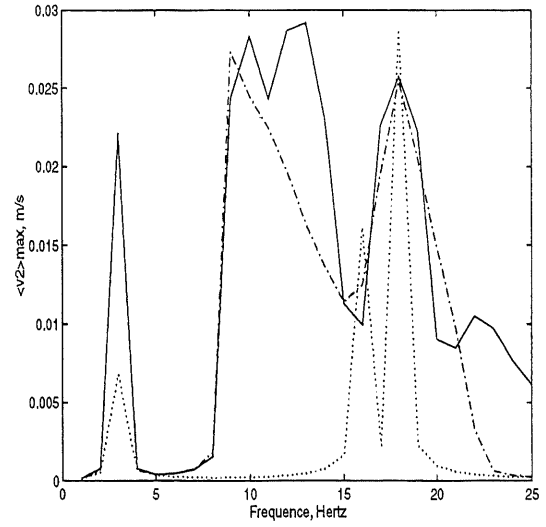


(d) 5 variables: E_1, h_2, ρ_1, h_1 et η_1

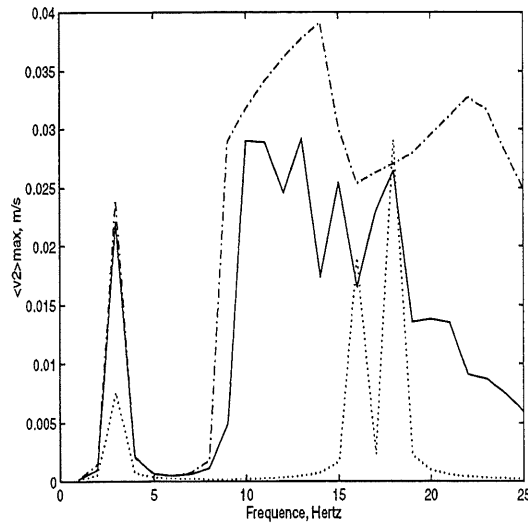
Figure 5.28: Treilli, 30% d'incertitude: comparaison des énergies cinétiques spécifiques maximales. —: méthode de Monté Carlo, - - : méthode PMO linéaire, ···: méthode de perturbations (ordre 1).



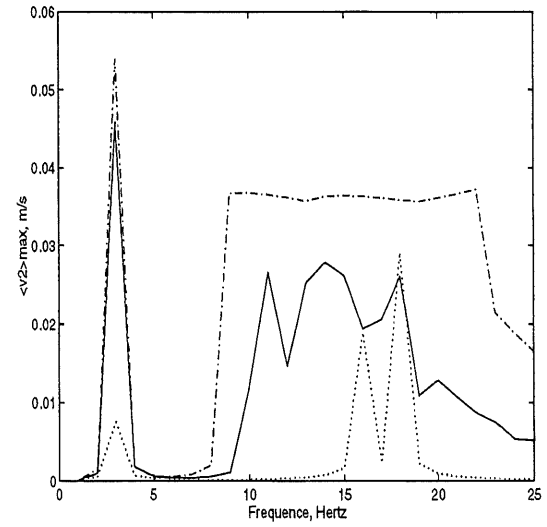
(a) 2 variables: E_1, h_2



(b) 3 variables: E_1, h_2, ρ_1



(c) 4 variables: E_1, h_2, ρ_1, h_1



(d) 5 variables: E_1, h_2, ρ_1, h_1 et η_1

Figure 5.29: Treilli, 60% d'incertitude: comparaison des énergies cinétiques spécifiques maximales. —: méthode de Monté Carlo, - -: méthode PMO linéaire, ···: méthode de perturbations (ordre 1).

- N : nombre de degrés de liberté.
- M : nombre de modes gardés pour construire la base modale.
- n : nombre de variables d'entrée.
- nt : nombre de tirages aléatoires (Monté Carlo) par variable.
- ni : nombre d'itérations pour une méthode de résolution SLP (Sequential Linear Programming).

L'analyse algorithmique de toutes les méthodes montre que les temps de calcul T sont de l'ordre de ceux présentés maintenant (le symbole \propto signifie: "de l'ordre de"):

- Monté Carlo simple: nt^n boucles pour lesquelles on calcule les vecteurs propres (N^3 opérations pour des matrices pleines), puis pour chaque fréquence (nf boucles), l'inverse de la matrice d'impédance projetée (M^3 opérations si elle n'est pas diagonale dans la base modale utilisée, M sinon). Cela donne:

$$T \propto nt^n \cdot N^3 \cdot nf \cdot M \quad (5.45)$$

- Méthode de perturbations linéaire: dans la première partie, calcul des vecteurs propres et valeurs propres aux paramètres moyens (N^3 opérations pour des matrices pleines), puis pour chaque paramètre (n boucles) et pour chaque mode (M boucles) calcul des dérivées des vecteurs propres et des valeurs propres par la méthode de Nelson (de l'ordre de N^3). Enfin, pour chaque paramètre (n boucles) et chaque fréquence (nf boucles) calcul de l'énergie cinétique spécifique (de l'ordre de M si la matrice d'impédance modale est diagonale). Le coût des stockages éventuels (dérivées des matrices et des vecteurs propres) dépend de la machine et de l'avancement technologique. Cela donne:

$$T \propto (N^3 + n \cdot M \cdot N^3 + n \cdot nf \cdot M) + \text{stockages et lectures} \quad (5.46)$$

- Méthode de perturbations quadratique: en premier lieu, calcul des vecteurs propres et valeurs propres aux paramètres moyens (N^3 opérations pour des matrices pleines), puis pour chaque couple de paramètres (n boucles si les couplages ne sont pas considérés et $n(n-1)/2$ boucles

avec les couplages) et pour chaque mode (M boucles) calcul des dérivées et dérivées secondes des vecteurs propres et des valeurs propres par la méthode de Nelson (de l'ordre de $2N^3$, au moins). Enfin, pour chaque paramètre (n boucles ou $n(n-1)/2$) et chaque fréquence (nf boucles) calcul de l'énergie cinétique spécifique (de l'ordre de M si la matrice d'impédance modale est diagonale). Le coût des stockages éventuels (dérivées des matrices et des vecteurs propres) dépend de la machine et de l'avancement technologique. Cela donne sans couplage:

$$T \propto (N^3 + 2 \cdot n \cdot M \cdot N^3 + n \cdot nf \cdot M) + \text{stockages et lectures} \quad (5.47)$$

et avec couplage (non utilisé dans ce mémoire):

$$T \propto (N^3 + n^2 \cdot M \cdot N^3 + 0.5n^2 \cdot nf \cdot M) + \text{stockages et lectures} \quad (5.48)$$

- Méthode de recherche des points modaux optimaux par approximation linéaire sans projection (méthode dite "directe"): $n + 1$ points pour lesquels on calcule les vecteurs propres et les valeurs propres complexes ($(2N)^3$ opérations pour des matrices pleines), puis inversion des matrices donnant les coefficients d'approximation des vecteurs et valeurs propres (de l'ordre de $3n^3$), puis nf boucles en fréquence contenant M boucles de tests d'intersection entre chaque mode et la fréquence d'excitation, et M évaluations de l'énergie cinétique spécifique (de l'ordre de M avec la méthode directe, car l'inversion de la matrice d'impédance modale diagonale est immédiate). Un allongement des temps peut provenir du calcul des vecteurs propres et valeurs propres complexes. Cela donne

$$T \propto n \cdot (2N)^3 + 3n^3 + nf \cdot M^2 \quad (5.49)$$

- Méthode de recherche des points modaux optimaux par approximation quadratique découplée sans projection (méthode dite "directe"): $2n + 1$ points pour lesquels on calcule les vecteurs propres et les valeurs propres complexes ($(2N)^3$ opérations pour des matrices pleines), puis inversion des matrices donnant les coefficients d'approximation des vecteurs et valeurs propres (de l'ordre de $3(2n)^3$), puis nf boucles en fréquence contenant M boucles de tests d'intersection entre chaque mode et la fréquence d'excitation. Si il y a une intersection, on utilise une méthode itérative SLP (Sequential Linear Programming) demandant ni boucles de calcul (croît avec l'incertitude, et dépend de la fréquence d'excitation et du contenu modal).

Enfin, on calcule l'énergie cinétique spécifique pour chaque mode, en inversant la matrice d'impédance modale diagonale (M opérations). Cela donne

$$T \propto 2n(2N)^3 + 3 \cdot (2n)^3 + nf \cdot ni \cdot M^2 \quad (5.50)$$

Le nombre ni d'itérations n'est pas connu d'avance. Il influence considérablement le temps de calcul total.

Les gains approximatifs pour des modèles éléments finis **moyens à grands** ($N \gg M \gg n$) par rapport à la méthode de Monté Carlo sont les suivants:

- Méthode de perturbations linéaire: le gain *dépend du nombre de variables incertaines et du nombre de tirages par variable dans la méthode de Monté Carlo*: $G \propto nt^n \cdot nf/n$.
- Méthode de perturbations quadratique: le gain *est au moins deux fois plus faible que celui de la méthode linéaire analogue*: $G \propto nt^n \cdot nf/(2n)$.
- Méthode de recherche des points modaux optimaux par approximation linéaire sans projection (méthode dite "directe"): le gain *dépend de la dimension de la base modale tronquée*: $G \propto nt^n \cdot nf \cdot M/(8n)$.
- Méthode de recherche des points modaux optimaux par approximation quadratique sans projection (méthode dite "directe"): le gain *est deux fois plus faible que la méthode linéaire analogue*: $G \propto nt^n \cdot nf \cdot M/(16n)$.

Par conséquent, la méthode PMO linéaire ou quadratique concurence les méthodes de perturbation en terme de temps de calcul, surtout si les base modales retenues sont petites (faible densité modale), et si les modèles sont de dimensions moyennes. Pour la méthode PMO et la méthode de perturbations, la largeur de l'intervalle d'incertitude n'est pas critique (elle n'influence pas trop le temps de calcul), alors qu'elle l'est pour la méthode de Monté Carlo (nombre de tirages). Le lecteur doit garder à l'esprit que les temps de calcul peuvent varier considérablement avec les routines utilisées et les caractéristiques des matrices (pleines, creuses...).

Résultats expérimentaux: les temps de calcul sont évalués avec le modèle du treilli. Les simulations effectuées font varier le nombre de variables d'entrée. Le nombre de modes retenus dans

la base est 3. Les temps concernent l'énergie cinétique spécifique maximale pour les 25 premières fréquences d'excitation (0 - 25 Hz). L'incertitude des paramètres est 10%. Le temps de calcul de la méthode de Monté Carlo est évalué de façon à atteindre la convergence.

Nombre de variables	MC	PMO1	PMO2	P1 et P2
2	3h. et 34min.	2.2 s.	3.0 s.	1.7 s.
3	17h. et 23min.	2.8 s.	4.6 s.	2.1 s.
4	18h. 25min.	3.8 s.	151 s.	2.45 s.
5	46h. 8min.	4.9 s.	252 s.	2.91 s.

Tableau 5.10: Treilli, comparaison des temps de calcul des méthodes de Monté carlo, PMO et perturbations pour 10% d'incertitude sur toutes les variables. Nombre de fréquences: 25. Processeur Pentium 200 MHz .

Commentaires concernant les méthodes de perturbations: on a jugé utile de présenter les temps de calcul des méthodes de perturbations dans ce tableau même si l'énergie cinétique spécifique maximale prédite est souvent erronée. On a observé les points suivants:

- Les méthodes de perturbations d'ordres 1 et 2 sont presque aussi rapides.
- Les méthodes de perturbations d'ordres 1 et 2 sont un peu plus rapides que la méthode PMO d'ordre 1. Elles sont beaucoup plus rapides que la méthode PMO d'ordre 2.

Commentaires concernant la méthode PMO: pour la méthode PMO1 on observe une progression linéaire du temps de calcul avec le nombre des variables. Cette tendance correspond au terme $n \cdot (2N)^3$ de l'équation (5.49). La méthode d'ordre 2 demande un temps de calcul beaucoup plus important que la méthode d'ordre 1 pour plus de 3 variables, à cause de l'algorithme d'optimisation itératif SLP. Toutefois, le temps est réduit si on limite le nombre d'itérations. On aurait aussi avantage à utiliser une routine compilée d'une bibliothèque de programmes. La rapidité de la méthode PMO1 décroît peu avec l'augmentation de l'incertitude (avec 5 variables et 60% d'incertitude, il faut 5.5 s.) tandis que la rapidité de la méthode d'ordre 2 dépend de l'incertitude (toujours à cause de l'algorithme itératif de programmation quadratique, SLP ou SQP).

Enfin, les temps de calcul de la méthode de Monté Carlo ne sont pas comparables aux temps des autres méthodes. Ce mauvais résultat est imputable au calcul des modes propres et aux nombreuses boucles d'échantillonnage. Si l'on pouvait utiliser l'approximation des vecteurs propres et des valeurs

propres dans cette méthode, on pourrait faire chuter le temps de calcul.

5.5 Synthèse de la nouvelle méthode

Ce chapitre a validé la nouvelle méthode en temps et en précision de la réponse maximale pour deux modèles simples d'éléments finis. Les résultats montrent que la nouvelle méthode prédit la réponse maximale en un temps très réduit par rapport à la méthode de Monté Carlo. La rapidité de la méthode d'approximation linéaire est comparable à la rapidité des méthodes de perturbations (au nombre de modes près), même pour de fortes incertitudes. La précision de la méthode PMO est excellente si l'approximation des vecteurs propres et des valeurs propres est adéquate. D'autre part, la méthode PMO est adaptée aux problèmes de dynamique contenant des résonances, contrairement à la méthode de perturbations.

Quelques traits de la nouvelle méthode sont expliqués dans le mémoire: en particulier, la méthode s'appuie sur l'approximation polynômiale des valeurs propres et des vecteurs propres, ce qui permet de stocker uniquement des coefficients. Cette technique augmente fortement la rapidité de reconstruction de la base modale dans la boucle de fréquence. Les simulations montrent aussi qu'il existe une incohérence entre l'approximation de même ordre des vecteurs propres normalisés et des valeurs propres. Il en résulte une prédiction erronée de l'énergie cinétique spécifique maximale. Pour y remédier, la matrice d'impédance modale n'est plus obtenue par projection mais par remplissage direct avec les approximations des valeurs propres complexes sur la diagonale.

Dans l'état actuel des travaux, la formulation linéaire de la nouvelle méthode semble plus intéressante que les formulations quadratiques ou d'ordres supérieurs pour des raisons essentiellement numériques: les algorithmes itératifs d'optimisation utilisés pour les fonctions et les contraintes non-linéaires ne sont pas toujours efficaces si ils sont appliqués à des approximations plus ou moins précises des modes propres. L'auteur n'a pu obtenir de meilleurs résultats avec une approximation quadratique qu'avec une approximation linéaire des vecteurs et des fréquences propres.

En conclusion, la prédiction de la réponse serait améliorée si l'on maîtrisait mieux les procédés d'approximation et de résolution (programmation linéaire, quadratique, etc...). Aux grandes incertitudes, il faut attacher une importance particulière à la fonction approchée et/ou à la méthode d'approximation.

Chapitre 6

Conclusion

Dans ce travail, on a proposé une nouvelle méthode pour prédire l'énergie cinétique spécifique maximale d'une structure non couplée ou faiblement couplée (fluide léger). Les objectifs de la recherche sont atteints:

- La structure du nouvel algorithme est modulaire: les composantes principales d'un programme d'éléments finis s'insèrent facilement dans l'organigramme. Un organigramme de synthèse présente l'articulation possible entre certains programmes utilisés au GAUS et la méthode PMO pour le calcul de la vitesse quadratique maximale: figure (6.1).
- L'énergie cinétique spécifique maximale est prédite avec un temps très réduit par rapport à la méthode de Monté Carlo (plusieurs ordres de grandeur plus longue), dépendamment du nombre de paramètres d'entrée et de l'incertitude des paramètres. La rapidité de la méthode laisse entrevoir une application à de gros modèles ou à des modèles comptant plusieurs dizaines de paramètres incertains. Toutefois, quelques améliorations sont nécessaires pour atteindre cet objectif.
- L'énergie cinétique spécifique maximale est prédite avec une bonne précision par rapport à la méthode de Monté Carlo au moins pour de faibles incertitudes (5% à 10%) ou un faible nombre de variables (1 à 4). Des valeurs d'incertitudes plus élevées sont possibles, mais le temps de calcul s'allonge en conséquence et la précision chute. Un nombre de variables plus grand est possible aussi, à condition que l'approximation des modes propres soit satisfaisante.

La méthode est avantageuse pour les raisons suivantes:

- Elle est applicable à d'autres réponses, comme les déplacements et les contraintes (sous toute réserve car l'expression des contraintes est relativement complexe). L'étendue des modifications à apporter est variable.
- Elle utilise des routines de calcul qui sont présentes dans la plupart des bibliothèques d'optimisation: voir par exemple les routines DLPRS, QPROG, BCLSF, BCONF, etc... de la bibliothèque IMSL [39] (1989). Ces routines sont d'un niveau professionnel.

La méthode PMO à quelques défauts:

- Une bonne approximation des vecteurs propres et des valeurs propres ne garantit pas que l'énergie cinétique spécifique maximale soit bonne sur toute la plage de fréquences. Pour améliorer le résultat aux grandes incertitudes, l'ordre des polynômes d'approximation doit être le plus élevé possible, ce qui implique un coût numérique important. Toutefois, une alternative intéressante semble être l'approximation multilinéaire (par sous-domaines).
- La méthode est associée à la décomposition modale de la réponse, or certains problèmes ne l'utilisent pas: les phénomènes transitoires ou les comportements hystérétiques. D'autre part certaines réponses ne s'expriment pas facilement dans la base modale: la puissance rayonnée par exemple. La méthode n'est pas applicable à ces problèmes sans modifications profondes.
- En pratique, la méthode peut être affectée par de fortes valeurs d'amortissement (chute de précision) malgré la prise en compte de l'amortissement au niveau même de la formulation. C'est ce que révèlent des simulations complémentaires.

6.1 Perspectives

Les perspectives englobent deux points: d'une part les parties du travail qui restent à éclaircir, d'autre part les parties qui peuvent être développées. Les points à éclaircir sont les suivants:

- La faible variabilité des valeurs propres et des vecteurs propres avec les paramètres d'entrée n'est pas démontrée. La démonstration mathématique est très complexe (peut-être infaisable) et dépend beaucoup des paramètres considérés. La démonstration expérimentale exige

de tester rigoureusement chaque propriété (module d'Young, propriétés de section, amortissement, raideur) sur un modèle universel.

- La méthode de projection directe suppose que la matrice d'impédance modale est diagonale, ce qui est vrai uniquement dans la base des vecteurs propres. La méthode directe n'est plus applicable dans une autre base, sauf modifications.

La suite du travail ouvre de nombreuses perspectives. On donne quelques pistes de recherche:

- L'étude de la réponse minimale de l'énergie cinétique spécifique: l'algorithme qui donne l'énergie cinétique spécifique maximale sert de base. Les modifications sont minimales.
- La méthode d'optimisation doit être améliorée pour rechercher le maximum de la réponse: par exemple, l'information des gradients n'a pas été exploitée à fond, ni l'information de masse dans la décomposition modale. L'auteur suggère d'intégrer la masse à la participation dynamique au carré, de sorte que la fonction coût devienne $|\Gamma_k|/\sqrt{m}$ et non simplement $|\Gamma_k|$ (page 61).
- L'adaptation de la méthode au problème du rayonnement: à l'origine, la nouvelle méthode devait s'insérer dans un cadre vibro-acoustique. Dans ce contexte, il est intéressant de prédire la puissance rayonnée maximale par une structure couplée à un fluide léger ou un fluide lourd (matrice d'impédance non diagonale) en utilisant quelques idées directrices de la nouvelle méthode. Afin d'établir un algorithme rapide et précis pour la puissance rayonnée maximale, il faut d'abord identifier les termes à faible variabilité dans les équations (faible variabilité vis à vis des paramètres d'entrée). Ces termes sont approximés par des polynômes. Ils sont l'équivalent des vecteurs propres et des valeurs propres de l'énergie cinétique spécifique. La seconde étape consiste à trouver un problème d'optimisation simple permettant de trouver rapidement le maximum de la puissance dans l'espace des paramètres d'entrée. La localisation du maximum ne dépend peut-être pas de certains calculs (comme les intégrations de surface), allégeant d'autant la programmation.
- L'algorithme de la méthode PMO se prête bien à l'hybridation avec des méthodes plus robustes ou plus rapides. On peut mentionner en particulier la méthode de perturbations linéaire, qui pourrait être utilisée entre les résonances tandis que la méthode PMO serait

utilisée au voisinage des résonances. L'hybridation avec la méthode de Monté Carlo est aussi une solution pour augmenter la précision des résultats: après avoir localisé l'emplacement du maximum dans l'espace des paramètres, l'algorithme enclanche une méthode locale de tirages aléatoires (autour du point trouvé). Enfin, la méthode PMO peut s'auto-corriger: l'approximation linéaire peut-être directement testée en simulant un autre point pour la mettre en défaut et engager une méthode quadratique (par exemple).

- L'algorithme de la méthode PMO peut être appliqué à des sous-domaines de l'espace des paramètres. La technique est basée sur l'approximation linéaire par morceaux de la réponse. Un arrangement astucieux des points de simulations (pour approximer les vecteurs et valeurs propres sur chaque sous-domaine) permet de réduire le temps consacré à la préparation des données (hors boucle de fréquences). L'algorithme est présenté à la figure (6.2). Sous cette forme l'algorithme PMO est parallélisable, chaque sous-domaine étant étudié par un processeur différent.

Outre ces perspectives, le programme doit être écrit en FORTRAN pour d'autres éléments que des poutres en deux dimensions. On gagnera en vitesse et en souplesse, notamment au niveau de l'interface avec des codes existants, comme GAUSVEM, code d'éléments finis développé par le GAUS (Groupe d'Acoustique de l'Université de Sherbrooke).

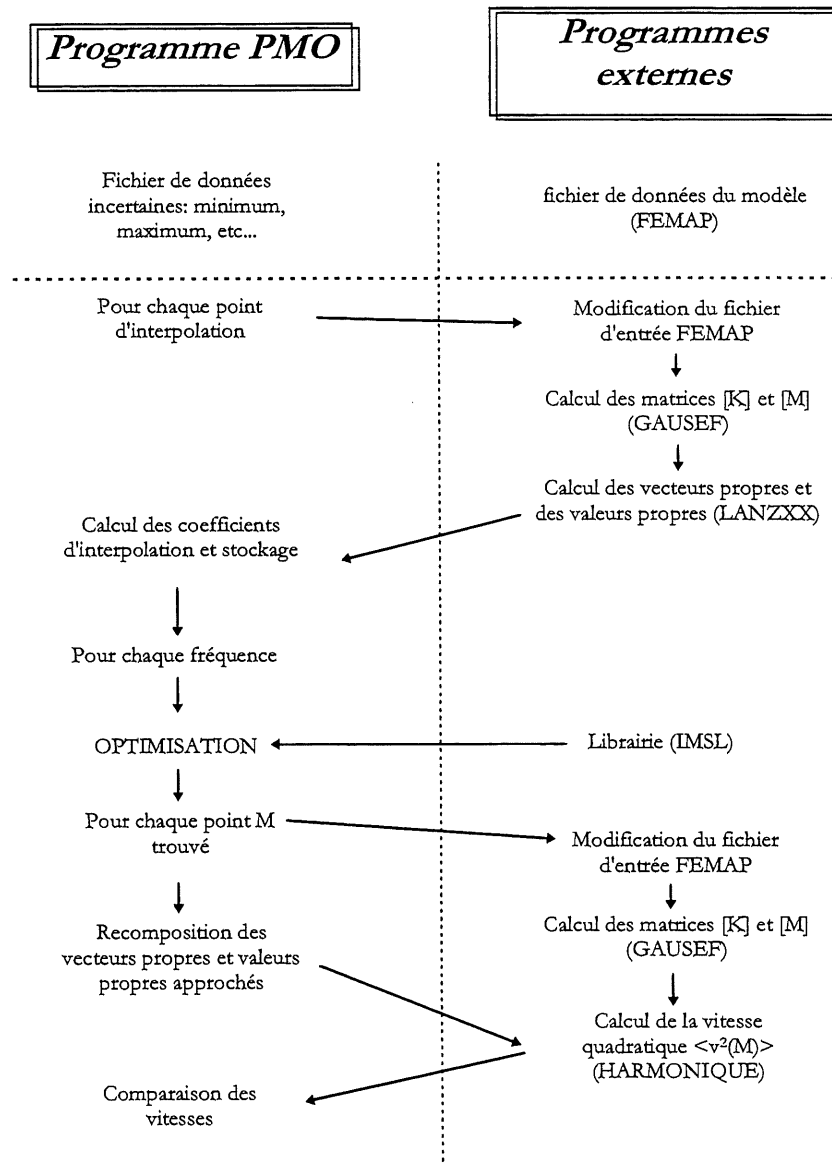


Figure 6.1: Interaction modules externes d'éléments finis / méthode PMO. La figure se lit de haut en bas pour respecter l'ordre chronologique des opérations.

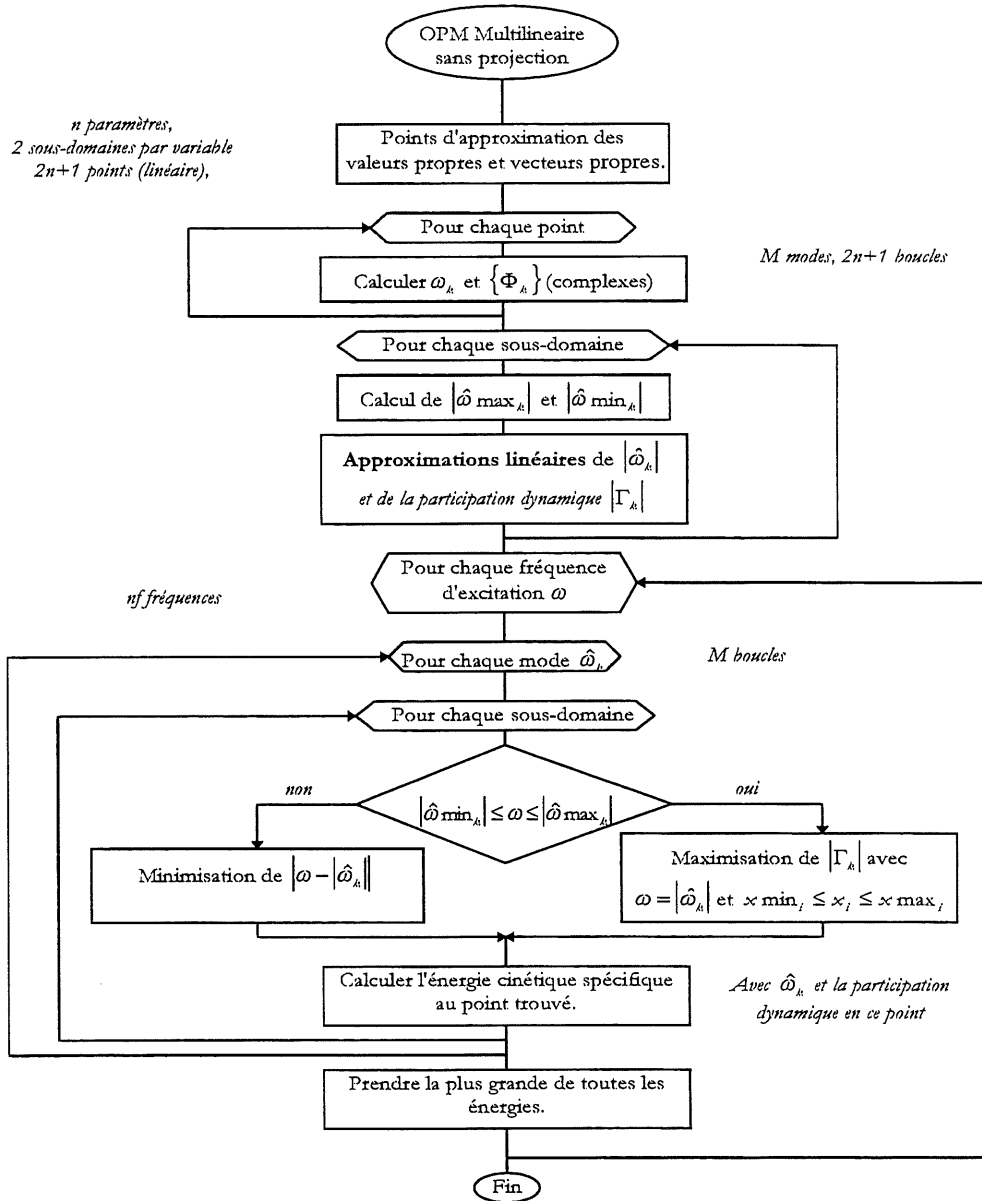


Figure 6.2: PMO multinéaire: approximation linéaire par morceaux.

ANNEXES

Annexe A

Variance de l'énergie cinétique spécifique: calcul complet

A.1 Référence

Cette annexe fait référence au chapitre 4, section intitulée "Variance de l'énergie sur C_n ". L'équation perturbée de l'énergie cinétique spécifique autour du point $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ est d'abord rappelée:

$$\begin{aligned}\langle v^2(M) \rangle &= \langle v^2(M_0) \rangle + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i} \Delta x_i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j\end{aligned}\tag{A.1}$$

A.2 Première étape: expression de la variance

La variance est l'espérance mathématique de l'écart quadratique des valeurs par rapport à la moyenne, c'est à dire:

$$V[\langle v^2(M) \rangle] = E[\{\langle v^2(M) \rangle - E[\langle v^2(M) \rangle]\}^2]\tag{A.2}$$

Par conséquent, il suffit de remplacer l'expression de l'énergie cinétique spécifique perturbée dans l'équation de la variance. Ceci donne:

$$\begin{aligned}V[\langle v^2(M) \rangle] &= E\left[\left\{\langle v^2(M_0) \rangle + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i} \Delta x_i \right. \right. \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j \\ &\left. \left. - \left(\langle v^2(M_0) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_j} E[\Delta x_i \Delta x_j]\right) \right\}^2\right]\end{aligned}\tag{A.3}$$

La soustraction des termes identiques laisse l'expression suivante:

$$\begin{aligned}
V[\langle v^2(M) \rangle] &= E \left[\left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_j} E[\Delta x_i \Delta x_j] \right\}^2 \right] \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

A.3 Deuxième étape: développement de l'équation de variance

Ce développement est technique. Le carré des sommes de l'équation (A.4) se développe en sommes composées doubles, triples et quadruples. L'application de l'identité remarquable donne:

$$\begin{aligned}
V[\langle v^2(M) \rangle] &= E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j \right. \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_p \partial x_q} \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_p \Delta x_q \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_p \partial x_q} E[\Delta x_i \Delta x_j] E[\Delta x_p \Delta x_q] \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_p \partial x_q} \Delta x_i \Delta x_p \Delta x_q \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_p \partial x_q} \Delta x_i E[\Delta x_p \Delta x_q] \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_p \partial x_q} \Delta x_i \Delta x_j E[\Delta x_p \Delta x_q] \right] \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

L'application de l'opérateur espérance le plus externe donne:

$$\begin{aligned}
V[\langle v^2(M) \rangle] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_j} E[\Delta x_i \Delta x_j] \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_p \partial x_q} E[\Delta x_i \Delta x_j \Delta x_p \Delta x_q] \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_p \partial x_q} E[\Delta x_i \Delta x_j] E[\Delta x_p \Delta x_q] \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_p \partial x_q} E[\Delta x_i \Delta x_p \Delta x_q] \\
&- \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_p \partial x_q} E[\Delta x_i] E[\Delta x_p \Delta x_q] \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_p \partial x_q} E[\Delta x_i \Delta x_j] E[\Delta x_p \Delta x_q] \quad (\text{A.6})
\end{aligned}$$

On fait maintenant l'hypothèse que la loi est symétrique (par exemple la loi normale ou la loi uniforme). On a donc:

$$E[\Delta x_i] = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$E[\Delta x_i \Delta x_p \Delta x_q] = 0 \quad (\text{A.8})$$

Compte tenu de (A.7) et (A.8), l'équation (A.6) se simplifie:

$$\begin{aligned}
V[\langle v^2(M) \rangle] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_j} E[\Delta x_i \Delta x_j] \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_p \partial x_q} E[\Delta x_i \Delta x_j \Delta x_p \Delta x_q] \\
&- \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_p \partial x_q} E[\Delta x_i \Delta x_j] E[\Delta x_p \Delta x_q] \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

On utilise ensuite une propriété intéressante de l'opérateur espérance, qui est:

$$\begin{aligned}
E[\Delta x_i \Delta x_j \Delta x_p \Delta x_q] &= E[\Delta x_i \Delta x_j] E[\Delta x_p \Delta x_q] \\
&+ E[\Delta x_i \Delta x_p] E[\Delta x_j \Delta x_q] \\
&+ E[\Delta x_i \Delta x_q] E[\Delta x_j \Delta x_p] \quad (\text{A.10})
\end{aligned}$$

En remplaçant $E[\Delta x_i \Delta x_j \Delta x_p \Delta x_q]$ par le développement précédent, l'équation (A.9) devient:

$$\begin{aligned}
V[\langle v^2(M) \rangle] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_j} E[\Delta x_i \Delta x_j] \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_p \partial x_q} E[\Delta x_i \Delta x_p] E[\Delta x_j \Delta x_q] \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_p \partial x_q} E[\Delta x_i \Delta x_q] E[\Delta x_p \Delta x_j] \quad (\text{A.11})
\end{aligned}$$

On échange ensuite les indices muets de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
j &\leftrightarrow p \\
j &\leftrightarrow q
\end{aligned}$$

pour obtenir, finalement, l'expression du chapitre 4:

$$\begin{aligned}
V[\langle v^2(M) \rangle] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_j} E[\Delta x_i \Delta x_j] \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_p} \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_j \partial x_q} E[\Delta x_i \Delta x_j] E[\Delta x_p \Delta x_q] \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_i \partial x_q} \frac{\partial^2 \langle v^2(M_0) \rangle}{\partial x_j \partial x_p} E[\Delta x_i \Delta x_j] E[\Delta x_p \Delta x_q] \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

Annexe B

Hybridation des méthodes de perturbation et de Monté Carlo: calculs de la moyenne et variance globales

B.1 Référence et rappel du problème

Cette annexe fait référence au chapitre 4, section intitulée "Compléments sur la méthode de perturbations". L'hybridation est définie comme la prédiction de la moyenne et de la variance de la réponse au moyen des méthodes de perturbations et de Monté Carlo. Pour des raisons de simplicité, on considère 2 variables d'entrée x_1 et x_2 . La première variable x_1 est traitée avec une méthode de Monté Carlo, tandis que x_2 est traitée avec une méthode de perturbations. Pour chaque tirage aléatoire i de x_1 , noté $x_1^{(i)}$, la réponse $\langle v^2(x_1^{(i)}, x_2) \rangle$ est développée en série de Taylor autour de $x_2^{(0)}$:

$$\langle v^2(x_1^{(i)}, x_2) \rangle = \langle v^2(x_1^{(i)}, x_2^{(0)}) \rangle + \frac{\partial \langle v^2(x_1^{(i)}, x_2^{(0)}) \rangle}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \langle v^2(x_1^{(i)}, x_2^{(0)}) \rangle}{\partial x_2^2} \Delta x_2^2 \quad (\text{B.1})$$

L'application des opérateurs de la moyenne et de la variance à l'équation (B.1) produit deux quantités qui sont la moyenne et la variance de l'énergie cinétique spécifique *pour la valeur $x_1^{(i)}$ du premier paramètre*. On obtient autant de variances et de moyennes que de tirages aléatoires de la variable x_1 . Soit nt le nombre de tirages de x_1 . On note les moyennes et variances du $i^{\text{ème}}$ tirage $E[\langle v^2(x_1^{(i)}, x_2) \rangle]$ et $V[\langle v^2(x_1^{(i)}, x_2) \rangle]$. Le problème est: **trouver les expressions de la moyenne globale et de la variance globale connaissant les moyennes et variances des tirages aléatoires (i variant de 1 à nt).**

B.2 Calcul de la moyenne globale

Par définition, la moyenne globale est l'intégrale double suivante (cas continu), où $f_{(1,2)}$ est la densité de probabilité couplée de x_1 et x_2 , et Δx_1 et Δx_2 les intervalles d'incertitude des variables:

$$E[\langle v^2 \rangle] = \int_{\Delta x_1} \int_{\Delta x_2} \langle v^2(x_1, x_2) \rangle f_{(1,2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{B.2})$$

Comme les variables sont supposées indépendantes (indépendance statistique), on a:

$$E[\langle v^2 \rangle] = \int_{\Delta x_1} \int_{\Delta x_2} \langle v^2(x_1, x_2) \rangle f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{B.3})$$

La simulation de Monté Carlo est un processus discret. Dans l'équation précédente, l'intégrale sur le domaine Δx_1 (aussi noté I_1 au chapitre 4) se transforme en somme des réponses obtenues pour chacune des nt simulations:

$$E[\langle v^2 \rangle] = \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^{nt} \left[\int_{\Delta x_2} \langle v^2(x_1^{(i)}, x_2) \rangle f_2(x_2) dx_2 \right] \quad (\text{B.4})$$

Pour simplifier l'écriture des expressions subséquentes, on adopte la notation suivante de l'énergie cinétique spécifique pour chaque tirage i :

$$\langle v^2 \rangle_i = \langle v^2(x_1^{(i)}, x_2) \rangle \quad (\text{B.5})$$

Or, par définition, la moyenne de l'énergie échantillonnée est donnée par:

$$E[\langle v^2 \rangle_i] = \int_{\Delta x_2} \langle v^2(x_1^{(i)}, x_2) \rangle f_2(x_2) dx_2 \quad (\text{B.6})$$

On reconnait cette expression dans l'équation (B.4). Par substitution, il vient finalement l'équation donnée au chapitre 4, à savoir:

$$E[\langle v^2 \rangle] \simeq \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^{nt} E[\langle v^2 \rangle_i] \quad (\text{B.7})$$

B.3 Calcul de la variance globale

Ce calcul est un peu plus complexe. La définition de la variance adoptée pour les besoins de la démonstration est la suivante:

$$V[\langle v^2 \rangle] = E[(\langle v^2 \rangle)^2] - E[\langle v^2(M) \rangle]^2 \quad (\text{B.8})$$

Or, $E[\langle v^2 \rangle]$ est connu (section précédente), et:

$$E[(\langle v^2 \rangle)^2] = \int_{\Delta x_1} \int_{\Delta x_2} \langle v^2(x_1, x_2) \rangle^2 f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{B.9})$$

soit encore, avec un raisonnement analogue aux précédents:

$$E[(\langle v^2 \rangle)^2] = \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^{nt} \left[\int_{\Delta x_2} \langle v^2(x_1^{(i)}, x_2) \rangle^2 f_2(x_2) dx_2 \right] \quad (\text{B.10})$$

On reconnaît dans l'équation (B.10) une expression faisant intervenir la variance de l'énergie cinétique spécifique échantillonnée:

$$\int_{\Delta x_2} \langle v^2(x_1^{(i)}, x_2) \rangle^2 f_2(x_2) dx_2 = V[\langle v^2 \rangle_i] - E[\langle v^2 \rangle_i]^2 \quad (\text{B.11})$$

Par conséquent, en opérant la substitution dans (B.10), il vient:

$$E[(\langle v^2 \rangle)^2] = \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^{nt} \left\{ V[\langle v^2 \rangle_i] - E[\langle v^2 \rangle_i]^2 \right\} \quad (\text{B.12})$$

et le résultat du chapitre 4 se déduit des équations (B.7), (B.12), et (B.8):

$$V[\langle v^2 \rangle] \simeq \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^{nt} V[\langle v^2 \rangle_i] + \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^{nt} \left\{ E[\langle v^2 \rangle_i]^2 \right\} - \left\{ E[\langle v^2 \rangle] \right\}^2 \quad (\text{B.13})$$

On voit en particulier que la variance globale **n'est pas la moyenne des variances locales**.

Annexe C

Organisation des fichiers Matlab

C.1 Introduction

Cette annexe décrit sommairement l'organisation des programmes développés par l'auteur sur Matlab (version 4.2). La disquette contenant toutes les routines est disponible au département de génie mécanique de l'Université de Sherbrooke auprès de:

Lise Morency
Département de génie mécanique,
Faculté des sciences appliquées,
Université de Sherbrooke,
J1K 2R1 Sherbrooke, Québec, Canada
Tél.: (819)-821-7812
Fax: (819)-821-7163

Convention typographique: les programmes de gestion d'exécutables ont un nom qui commence par la lettre "x".

C.2 Organisation globale

La figure (C.1) montre l'organisation générale des programmes qui calculent l'énergie cinétique spécifique maximale. Le répertoire "IN" contient les fichiers d'entrée éléments finis. Ces fichiers contiennent également des informations sur l'incertitude de chaque variable, sur la bande de fréquence, sur les masses et raideurs ajoutées. Le répertoire "SRC" contient les fichiers sources mc.m pour la méthode Monté Carlo, pmo.m pour la méthode PMO, et p2.m pour la méthode de perturbations. Le programme xconfig.m s'occupe de deux choses:

- La gestion de l'exécution des programmes.
- L'initialisation des variables d'entrée des programmes mc.m, pmo.m et p2.m.

Le programme `xconfig.m` contient la sélection des variables incertaines parmi celles qui sont déclarées dans le répertoire "IN", le nombre de simulations de Monté Carlo, l'ordre des approximations des méthodes de perturbations et PMO. La méthode de perturbations dispose d'un répertoire "BIN" particulier qui contient les dérivées des matrices de raideur et de masse, ainsi que les dérivées des valeurs propres et des vecteurs propres. Le répertoire "RESULTATS" contient les fichiers de sortie des programmes `mc.m`, `pmo.m` et `p2.m`: l'énergie cinétique spécifique maximale par fréquence, le temps de calcul, les valeurs des paramètres optimaux.

En plus de ces programmes, quelques routines permettent de calculer rapidement les fréquences propres (`omega.m`), les vecteurs propres (`shape.m`) et l'énergie cinétique spécifique (`v2.m`) du modèle pour une combinaison particulière des paramètres (figure C.2). Les routines sont gérées par le programme `xsimple.m`. Enfin, le programme `xeigen.m` permet d'étudier les vecteurs propres et les fréquences propres en fonction d'un paramètre particulier (figure C.3).

C.3 Sous-programmes communs

Les routines communes à tous les programmes principaux (`mc.m`, `pmo.m`, `p2.m`, `omega.m`, `shape.m`, `v2.m`, `approx.m`) sont les suivantes:

- `readin.m`: lecture des fichiers d'entrée `treilli.m` ou `portique.m`.
- `stiff.m`: générateur de la matrice de raideur élémentaire dans le repère de l'élément. Pour des poutres en flexion, la forme analytique de la matrice élémentaire est connue.
- `mass.m`: générateur de la matrice de masse élémentaire dans le repère de l'élément. Pour des poutres en flexion, la forme analytique de la matrice élémentaire est connue.
- `trsgen.m`: générateur de la matrice de passage du repère de l'élément au repère global. Le résultat est une matrice 6×6 .
- `trscor.m`: transformation de la matrice élémentaire du repère local au repère global.
- `eigsort.m`: calcul des vecteurs propres et des valeurs propres dans l'ordre des valeurs propres croissantes. Les valeurs propres sont normalisées par rapport à la masse.

Toutes ces routines sont placées dans le répertoire SRC.

C.4 Sous-programmes spécifiques

Les routines particulières du programme de perturbations `p2.m` sont les suivantes:

- `pick.m`: sélectionne un vecteur propre et une valeur propre d'un mode particulier. Ce programme permet de sélectionner aussi les dérivées de ce vecteur propre et de cette valeur propre.

- `nelson1.m`: calcule la solution particulière $\{\Psi_k\}$ de l'équation (4.43) du chapitre 4, page (53). Cette solution permet de calculer la dérivée première du vecteur $\{\Phi_k\}$.
- `nelson2.m`: calcule la solution particulière $\{\Theta_k\}$ de l'équation (4.46) du chapitre 4, page (53). Cette solution permet de calculer la dérivée seconde du vecteur $\{\Phi_k\}$.

Les routines particulières du programme `pmo.m` sont les suivantes:

- `gen.m`: génère un vecteur rempli de 0 et 1 avec une séquence bien définie. Par exemple, `gen(2,6)` produit le vecteur suivant $V(0,0,1,1,0,0)$ (dimension de 6 et alternance de 0 et 1 toutes les 2 composantes).
- `slp1.m`: méthode de programmation linéaire pour résoudre l'algorithme de la section (4.4.4) du chapitre 4.
- `slp2.m`: méthode de programmation quadratique pour résoudre l'algorithme de la section (4.4.4) du chapitre 4. L'algorithme SLP contenu dans `slp2.m` a été spécialement adapté aux fonctions et contraintes quadratiques.

Les routines particulières du programme `mc.m` sont les suivantes:

- `to_base.m`: permet d'associer à chaque nouvelle simulation une combinaison de paramètres tirés aléatoirement et rangés au préalable dans des tableaux.

Le fonctionnement de `to_base.m` est le suivant: le compteur de simulations (*cpt*, par exemple), le nombre n de paramètres et le nombre nt de tirages par paramètre sont passés en argument à `to_base.m`. La fonction convertit *cpt* dans la base nt sur n digits. Par exemple pour 3 tirages par variable ($nt = 3$) et deux variables incertaines x_1 et x_2 ($n = 2$), on forme la suite des nombres (00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22). Chaque valeur du compteur *cpt* est associée par le programme à l'un des nombres de la suite. Ce nombre est compris entre 00 et 22 dans cet exemple. Le premier chiffre indique quelle valeur aléatoire de x_1 prendre dans le tableau des tirages aléatoires de x_1 , et le second chiffre indique quelle valeur aléatoire de x_2 prendre dans le tableau des tirages aléatoires de x_2 . Le tableau des tirages aléatoires est préparé à l'avance pour chaque variable.

Les autres programmes n'ont pas de routines spécifiques différentes de celles qui sont mentionnées ici.

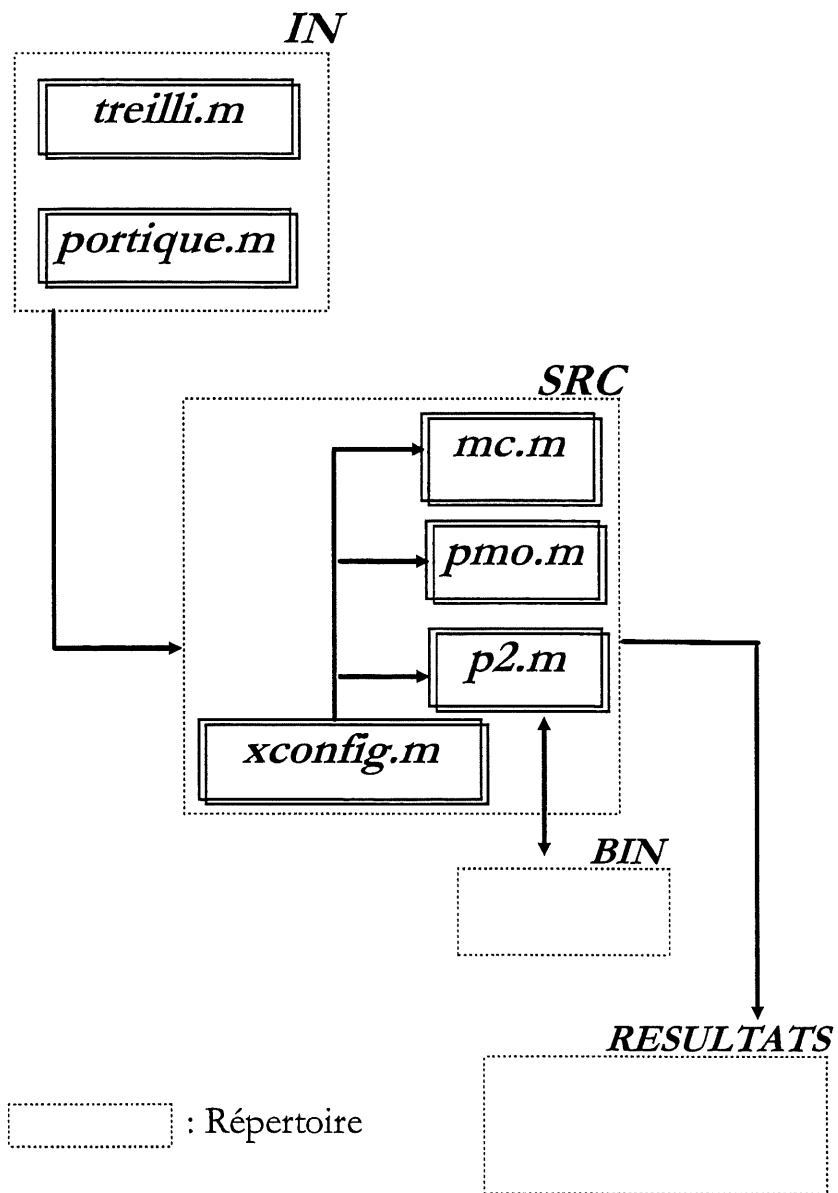


Figure C.1: Vitesse quadratique: organisation des répertoires de travail et contenu principal de ces répertoires.

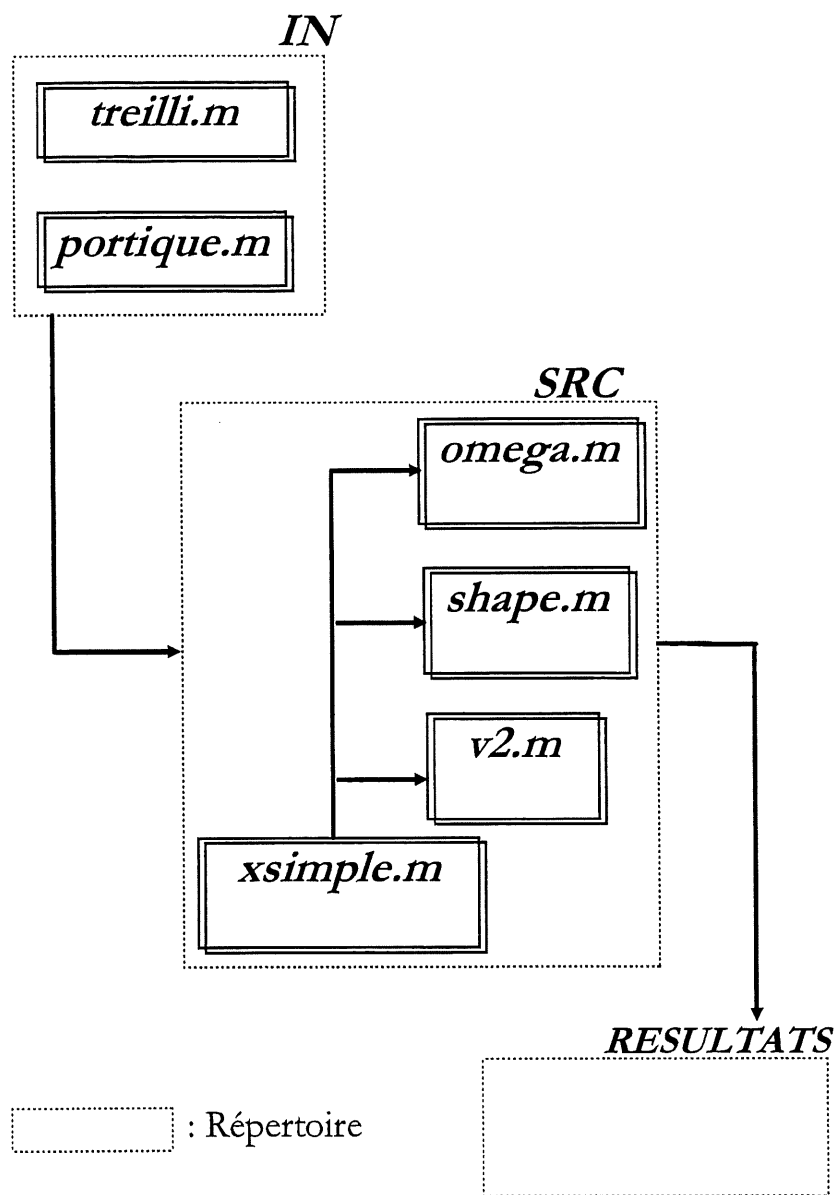


Figure C.2: Structure déterministe: organisation des répertoires de travail et contenu principal de ces répertoires.

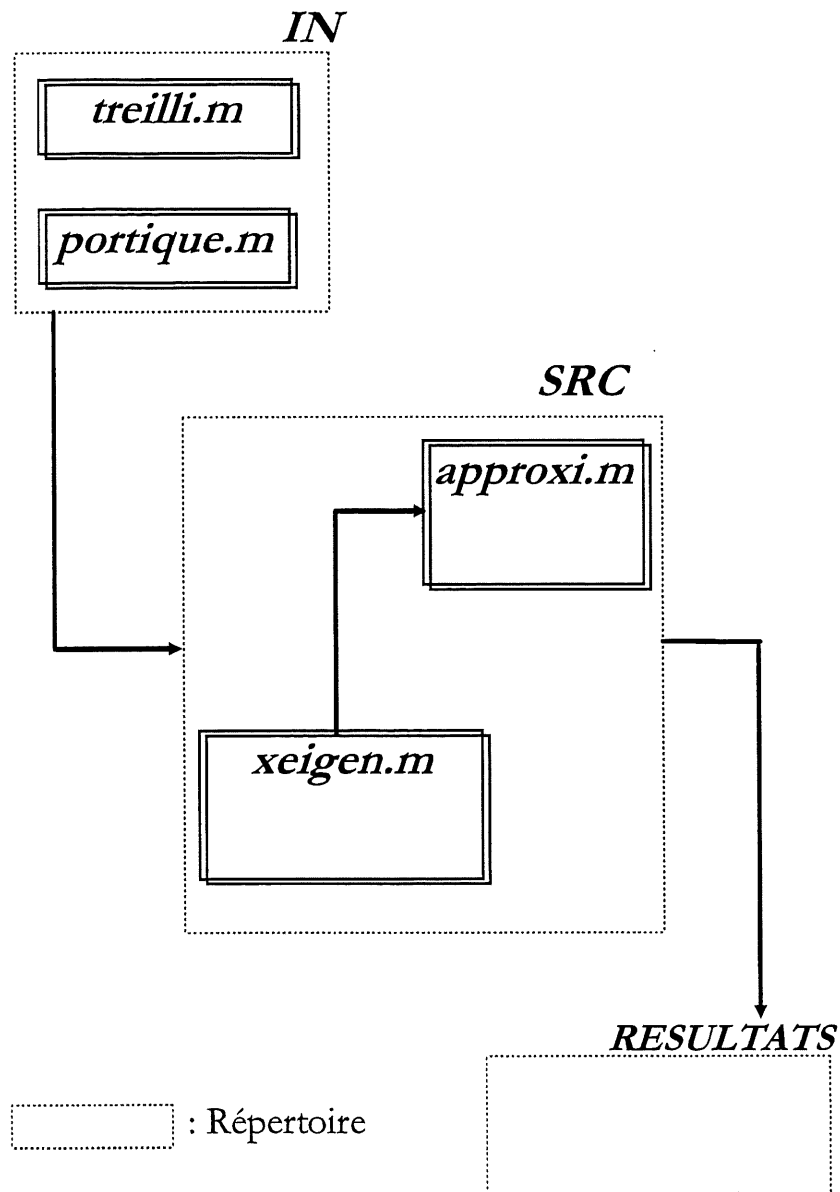


Figure C.3: Vecteurs et valeurs propres en fonction d'un paramètre d'entrée: organisation des répertoires de travail et contenu principal de ces répertoires.

Bibliographie

- [1] ADELMAN, H., HAFTKA, R. (1985) Sensitivity analysis of discrete structural systems. *AIAA Journal*, vol. 24, no. 5, pp. 823–832.
- [2] AIAA (1992). Structural optimization: status and promise. Ouvrage collectif.
- [3] ALLEMANG, R., BROWN, D. (1982) A correlation coefficient for modal vector analysis. In *Proceedings of the first IMAC*, pp. pp. 110–116, Orlando (Florida).
- [4] ARORA, J., GOVIL, A. (1977) Design sensitivity analysis with substructuring. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, vol. 103, no. EM4, pp. 537–548.
- [5] BARTHELEMY, J.-F. M., HAFTKA, R. (1992) Function approximations. In *Structural optimization: status and promise*, volume 150, chapter 4. publié par l'AIAA.
- [6] BATEMAN, H. (1954) *Tables of integral transforms*, volume I. McGraw-Hill Book Co., New-York.
- [7] BEACHER, G., INGRA, T. (1981) Stochastic FEM in settlement predictions. *ASCE Journal of Geotechnical Engineering*, vol. 107, pp. 449–463.
- [8] BENAROYA, H., REHAK, M. (1988) Finite element methods in probabilistic structural analysis: a selective review. *Applied Mechanics Review*, vol. 41, no. 5, pp. 201–213.
- [9] BOX, G., DRAPER, N. (1987) *Empirical model-building and response surfaces*. John Wiley and Sons, New-York.
- [10] BRATLEY, P., FOX, B., SHRAGE, E. (1983) *A guide to simulation*. Springer-Verlag, New-York.
- [11] BROWN, R., NACHLAS, J. (1985) Structural optimization of laminated conical shells. *AIAA Journal*, vol. 23, no. 5, pp. 781–787.
- [12] CAMBOU, B. (1975) Application of first order uncertainty analysis in the finite element method in linear elasticity. In *Proceedings of the 2nd international conference on application of statistics and probability in soil and structural engineering*, Aachen (Allemagne). pp. 67–68.
- [13] CAO, X., MLEJNEK, P. (1992) Second order eigensensitivity analysis of discrete structural systems. *Computer and Structures*, vol. 44, no. 1–2, pp. 399–404.

- [14] CAUGHEY, T. (1963) Equivalent linearization techniques. *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 35, no., pp. 1706–1711.
- [15] CHON, C. (1984) Design sensitivity analysis via strain energy distribution. *AIAA Journal*, vol. 22, pp. 559–661.
- [16] DANTZIG, G. (1963) *Linear programming and extensions*. Princeton University Press, New Jersey.
- [17] DAVIS, P., RABINOWITZ, P. (1967) *Numerical integration*. Blaisdell Publishing Company, Massachusetts.
- [18] DEODATIS, G. (1990) Bounds on response variability of stochastic finite element systems. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, vol. 116, no. 3, pp. 565–585.
- [19] DEVIJVER, P., KITTLER, J. (1982) *Pattern recognition: a statistical approach*. Prentice Hall, New Jersey.
- [20] DITLEVSEN, O. (1981) *Uncertainty modeling*. McGraw-Hill, New York.
- [21] DITLEVSEN, O., TARP-JOHANSEN, N. (1986) Choice of input fields in stochastic finite elements. In *Proceedings of the seventh specialty conference on Probabilistic mechanics and structural reliability*, pp. pp. 821–837, Worcester (Massachusetts).
- [22] FLEURY, C. (1989) Efficient approximation concepts using second order information. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, pp. 2041–2058.
- [23] FORSYTH, R. (1983) *Fuzzy reasoning systems*. Chapman and Hall, New York.
- [24] FOX, R., KAPOOR, M. (1968) Rates of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA Journal*, vol. 6, no. 12, pp. 2426–2429.
- [25] FREDHOLM, I. (1903) Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Mathematica*, vol. 27, pp. 365–390.
- [26] GHANEM, R., SPANOS, P. (1990) *Stochastic finite elements: a spectral approach*. Springer-Verlag, New-York.
- [27] GURDAL, Z., HAFTKA, R. (1985) Sensitivity derivatives for static test loading boundary conditions. *AIAA Journal*, vol. 23, pp. 159–160.
- [28] HAFTKA, R., SHORE, C. (1979) Approximation method for combined thermal/structural design. Technical Report no. TP-1428, NASA.
- [29] HAHN, G., SHAPIRO, S. (1967) *Statistical models in engineering*. John Wiley and Sons.
- [30] HAJEK, B. (1988) Cooling schedules for optimal annealing. *Mathematics of Operations Research*, vol. 13, no. 4, pp. 671–680.

- [31] HAJELA, P., BERKE, L. (1990) Neurobiological computational models in structural analysis and design. In *Proceedings of 31st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC structures, structural dynamics and material conference* (1990). pp. 345–355.
- [32] HANDA, K., ANDERSON, K. (1981) Application of finite element methods in statistical analysis of structures. In *3rd international conference on structural safety and reliability*, Trondheim (Norvège).
- [33] HARR, M. (1989) Probabilistic estimates for multivariate analyses. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 13, no. 5, pp. 313–318.
- [34] HIEN, T., KLEIBER, M. (1990) Finite element analysis based on stochastic Hamilton variational principle. *Computer and Structures*, vol. 37, no. 6, pp. 893–902.
- [35] HISADA, T., NAKAGIRI, S. (1980) A note on stochastic finite element method (part 2) - variation of stress and strain caused by fluctuations of material properties and geometrical boundary conditions. *Seisan-Kenkyu*, vol. 35, no. 5, pp. 262–265.
- [36] HISADA, T., NAKAGIRI, S. (1980) A note on stochastic finite element method (part3) - an extension of the methodology to non-linear problems. *Seisan-Kenkyu*, vol. 35, no. 12, pp. 572–575.
- [37] HISADA, T., NAKAGIRI, S. (1981) Stochastic finite element method developed for structural safety and reliability. In *3rd international conference on structural safety and reliability*, Trondheim (Norvège).
- [38] HOLLAND, J. (1975) *Adaptation in natural and artificial systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor.
- [39] IMSL (1989). Math/Library, FORTRAN subroutines for mathematical applications, edition 1.1. Manuel de référence en 1 volume.
- [40] IOTT, J., HAFTKA, R., ADELMAN, H. (1985) On a procedure for selecting step sizes in sensitivity analysis by finite differences. Technical Report no. TM-86382, NASA.
- [41] JOO, K., LIU, W. (1988) A probabilistic approach for structural-acoustic finite element analysis. *ASME Applied Mechanics Division*, vol. 93, pp. 151–168.
- [42] KARHUNEN, K. (1947) Uber lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung. *American Academy of Science*, vol. 37, pp. 3–79.
- [43] KELLEY, J. (1960) The cutting plane method for solving convex programs. *Journal of the society for industrial and applied mathematics*, vol. 8, pp. 703–713.
- [44] KIRKPATRICK, S., GELATT, C., VECCHI, M. (1983) Optimization by simulated annealing. *Science*, vol. 220, no. 4598, pp. 671–680.

- [45] KIRSCH, U. (1991) Reduced basis approximations of structural displacements for optimal design. *AIAA Journal*, vol. 29, no. 10, pp. 1751–1758.
- [46] KIRSCH, U., TOLEDANO, G. (1983) Approximate reanalysis for modifications of structural geometry. *Computers and structures*, vol. 16, pp. 269–279.
- [47] KIUREGHIAN, D. (1985) Finite element methods in structural safety studies. In *Proceedings of the ASCE Convention*, Denver (Colorado).
- [48] KLEIBER, M., HIEN, T. (1993) *The stochastic finite element method. Basic perturbation technique and computer implementation*. John Wiley and Sons, New-York.
- [49] LI, C., KIUREGHIAN, D. (1992) Optimal discretization of random fields for SFEM. In *Proceedings of the 6th ASCE specialty conference on probabilistic mechanics and structural and geotechnical reliability*, Denver (Colorado).
- [50] LI, K. (1991) Point estimate methods in probabilistic analysis. Technical report, Department of civil and maritime engineering, University of new South Wales.
- [51] LIU, W., BELYTSCHKO, T., MANI, A. (1986) Random field finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 23, no. 10, pp. 1831–1845.
- [52] LIU, W., BELYTSCHKO, T., MANI, A., BESTERFIELD, G. (1988) *Finite element methods for plate and shell structures, vol. 2: Formulation and algorithms*. Pineridge.
- [53] LIU, W., LU, Y., CHEN, J. (1990) Probabilistic and reliability analysis of a structural-acoustic system. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 137, no. 1, pp. 83–105.
- [54] LOEVE, M. (1948) Fonctions aléatoires du second ordre. In *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Gauthier Villars, Paris.
- [55] METROPOLIS, N., ROSENBLUTH, A., ROSENBLUTH, M., TELLER, A., TELLER, E. (1953) Equation of state by fast computing machines. *Journal of chemical physics*, vol. 21, no. 6, pp. 1087–1092.
- [56] MONTGOMERY, D. (1991) *Design and analysis of experiments*. John Wiley and Sons, New-York.
- [57] NAKAGIRI, S., HISADA, T. (1983) A note on stochastic finite element method (part 6)- an application in problems of uncertain elastic foundation. *Seisan-Kenkyu*, vol. 35, no. 1, pp. 20–23.
- [58] NAKAGIRI, S., HISADA, T. (1983) A note on stochastic finite element method (part 7)- time-history analysis of structural vibration with uncertain proportional damping. *Seisan-Kenkyu*, vol. 35, no. 5, pp. 232–235.

- [59] NELSON, R. (1976) Simplified calculation of eigenvectors derivatives. *AIAA Journal*, vol. 14, pp. 1204–1205.
- [60] PARK, C. (1987) The Mellin transform in probabilistic cash flow modelling. *The Engineering Economist*, vol. 32, no. 2, pp. 115–134.
- [61] PFAFFINGER, D. (1981) Probabilistic dynamic analysis with ADINA. *Computer and Structures*, vol. 13, pp. 637–646.
- [62] POWELL, M. (1978) Algorithm for nonlinear constraints that use Lagrangian functions. *Mathematical programming*, vol. 14, no. 2, pp. 224–248.
- [63] PRASAD, B. (1983) Explicit constraint approximation forms in structural approximation. Part I: analyses and projections. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 40, no. 1, pp. 1–26.
- [64] PRESS, W., AL. (1994) *Numerical Recipes in FORTRAN: the art of scientific computing*, 2nd ed. University of Cambridge, Cambridge (Massachusetts).
- [65] PRITCHARD, J., ADELMAN, M. (1990) Differential equation based method for accurate approximations in optimization. *AIAA Journal*, vol. 29, no. 12, pp. 2240–2246.
- [66] RECHENBERG, I. (1965) *Cybernetic solution path of an experimental problem*. Library Translation 1122, Royal Aircraft Establishment, Farnborough, Hampshire (England).
- [67] ROSEN, J. (1960) The gradient projection method for nonlinear programming, part I. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 8, pp. 181–217.
- [68] ROSEN, J. (1961) The gradient projection method for nonlinear programming, part II. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 9, pp. 414–432.
- [69] ROSENBLUETH, E. (1975) Point estimates for probability moments. In *Proceedings of the National Academy of Science*, USA. pp. 3812–3814.
- [70] SAAD, Y. (1994) SPARSKIT: a basic toolkit for sparse matrix computations, version 2. Technical report, Computational Science Department, University of Minnesota, Minneapolis.
- [71] SHINOZUKA, M., NOMOTO, T. (1980) Response variability due to spatial randomness of material properties. Technical report, Department of civil engineering, Columbia University, New York City.
- [72] SHINOZUKA, M., YAMAZAKI, F. (1988) Stochastic finite element analysis, an introduction. In *Stochastic structural dynamics, progress in theory and application*, pp. 241–291. Elsevier Applied Science.
- [73] SIGBJOERNSSON, R., SMITH, E. (1980) Wave induced vibration of gravity platforms: a stochastic theory. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 4, pp. 155–165.

- [74] SINGIRESU, S. (1996) *Engineering optimization 3rd edition*. John Wiley and Sons.
- [75] SONG, D., HAN, W., CHEN, S. (1995) Simplified calculation of eigenvector derivatives with repeated eigenvalues. *AIAA Journal*, vol. 34, no. 4, pp. 859–862.
- [76] SOONG, T., BOGDANOFF, J. (1993) On the natural frequencies of a disordered linear chain of n degrees of freedom. *International Journal of Mechanical Science*, vol. 5, pp. 237–249.
- [77] SUTTER, T., CAMARDA, C., WALSH, J., ADELMAN, H. (1988) Comparison of several methods for calculating vibration mode shape derivatives. *AIAA Journal*, vol. 26, no. 12, pp. 1506–1511.
- [78] TAKADA, T., SHINOZUKA, M. (1989) Local integration method in stochastic finite element analysis. In *International Conference for Structural Safety and Reliability* (1989). pp. 1073–1080.
- [79] TUNG, Y. (1990) Mellin transform applied to uncertainty analysis in hydrology/hydraulics. *ASCE Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 116, no. 5, pp. 659–673.
- [80] VALLAPIAN, S., PHAM, T. (1993) Fuzzy finite element analysis of a foundation on an elastic soil medium. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 17, pp. 771–789.
- [81] VANMARCKE, E., GRIGORIU, M. (1983) Stochastic finite element analysis of simple beams. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, vol. 109, no. 5, pp. 1203–1214.
- [82] WANG, B. (1991) Improved approximate methods for computing eigenvector derivatives. *AIAA Journal*, vol. 29, no. 6, pp. 1018–1020.
- [83] WATANABE, S. (1978) Generalized fuzzy set theory. In *IEEE Transactions on Systems Man Cybernet*, Vol. 8 (1978). pp. 756–760.
- [84] ZADEH, L. (1965) Fuzzy sets. *Information and Control*, vol. 8, no. 3, pp. 338–353.
- [85] ZHANG, R., GAO, H. (1992) The random variational principle and finite element method. *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 13, no. 5, pp.
- [86] ZHU, W., WU, Y., WU, W. (1992) Stochastic FEM based on local averages of random vector fields. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, vol. 118, no. 3, pp. 496–511.
- [87] ZOPPOU, C., LI, K. (1993) New point estimate method for water resources modeling. *ASCE Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 119, no. 11, pp. 1300–1307.